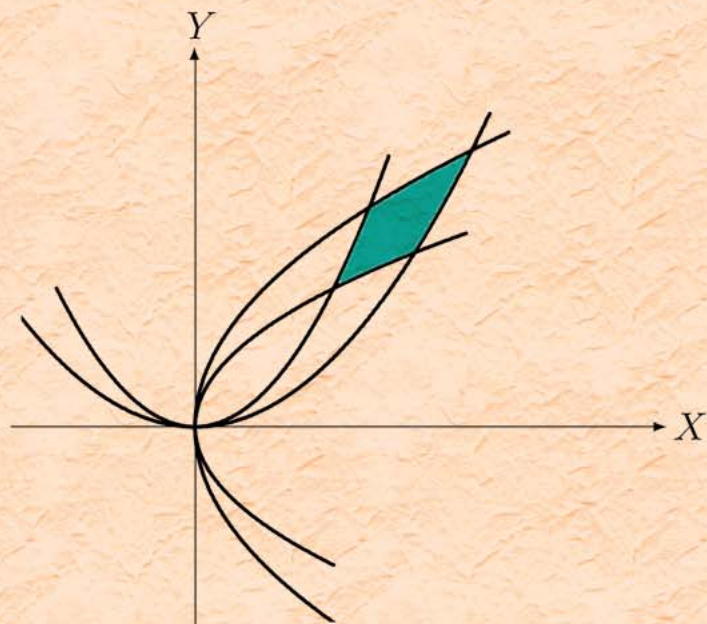


新 微積分演習

電子書 2 版

編著者：顏國勇



國立成功大學數學系 2013 年 3 月 21 日

序

完成了《微積分學》及《機率論》的電子書之後，進一步希望寫點有關微積分解題的講義。很多微積分初學者在上完課之後，看到題目時往往不知如何下手解題，於是對於這門課望而卻步。本書之目的：希望能提升初學者對於微積分學習之興趣；而以良好的微積分基底，迎接更為深奧之純粹或應用數學；也希望協助讀者建立正確的數學觀念——經由「定義」和「定理」以演繹推理方法解決問題；我們若能學得縝密思考、分析問題以及強化邏輯演繹的能力，對於往後的終身學習影響深遠。

筆者曾在 1978 至 1993 年間出版《微積分演習》，在 1994 及 1995 年完成《微積分題庫 I & II》，這些書本蒐集了二千多題的習題考題及其解，大部分以 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 格式編輯，自 2012 年元月開始，從其中篩選較具代表性的三百多題，分置於三十一個單元之內。原則上選題時避免過份簡單或過份艱深，同一單元內儘可能選取不同類型之題目。與前二本電子書相同，改以 $\text{cwt}_{\text{E}}\text{X}$ 排版系統編輯，書中全部圖形皆自行繪製，以協助讀者迅速進入問題之核心。

本書內之符號與觀念皆與拙著《微積分學·電子書 2.1 版》相同，讀者閱讀本書時，若遭遇瓶頸，不妨參照上述電子書，對於微積分學習必有裨益。

全球各地的大學生大部分修過《微積分》這門課，不少人也考得高分，但能完全領略其中奧秘並運用自如者，應屬少數，本書提供讀者一個自我評鑑的平台，看完題目，提起筆，思考和解題，最後再和書中之解比較一下。

編書多年，雖校對再三，深知書中誤謬甚難完全避免，深盼讀者先進不吝來函賜正。

顏 國 勇

2012年九月於台灣台南

t14014@math.ncku.edu.tw

再版序

2012年九月編完《新微積分演習》電子書後，一方面希望能再校閱一次，減少錯誤，若有令讀者難以理解之處或語意不清者，則更加詳細說明；另一方面，在網路上發現許多 pdf 格式之電子書，其「目錄」具有超連結 (hyperlink) 功能，在目錄之某一章或節之上，以滑鼠點擊，可立即跳至該章節。於是見賢思齊，上網學習，困難之一是原先以 $\text{P}\text{T}\text{E}\text{X}$ 軟體所繪之圖形與超連結程式有所衝突，只好將所有圖形先利用繪圖軟體 Photoshop 改為 eps 格式，再一一以 "includegraphics" 方法引進來；另一個困難是，本書必須將所有三十一個單元全部放在一起跑完，才會自動做成有具有超連結功能之目錄，初版時係每一單元獨立跑完，再以軟體 Adobe Acrobat 加以鏈接，二者作法不同。起初遭遇不少困難，感謝眾多 $\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X}$ 高手，在網際網路上詳加解說，本人經過多次錯誤和嘗試，困難也都一一克服，只是增加不少修訂之時間。

此次校閱發現之誤謬中，有些是粗心打錯，有些則是計算過程犯了錯，深信即使再度校閱訂正，錯誤仍然存在，祈求讀者一旦發現問題，不吝來函斧正。

顏 國 勇

2013年三月

目 錄

序	2
本書常用之數學符號	6
1 集合、函數、 $\sup$, $\inf$	7
2 極限	16
3 連續(一維)	27
4 導數運算	33
5 切線與關聯比率	40
6 特殊函數及其導數運算	47
7 均值定理	55
8 極值問題(單變數)	61
9 參數方程式	72
10 隱函數(單變數)	80
11 Taylor 定理	88
12 近似值問題	96
13 作圖與凹凸性	108
14 不定積分	119
15 Riemann 積分	130
16 微積分基本定理	141
17 積分變換(單變數)	152
18 瑕積分	157
19 近似積分	166
20 積分應用	173
21 實數序列及實數級數	194
22 冪級數	205
23 n 維空間與向量運算	217
24 空間曲線	221

25 多變數函數之極限及連續性	229
26 方向導數、梯度與切面	236
27 極值問題(多變數)	248
28 Taylor 公式(多變數)與近似值	262
29 二重積分、累次積分	266
30 積分變換(多變數)	277
31 線積分與曲面積分	289

本書常用之數學符號

- $\mathbb{R}$ = 實數系
- $\mathbb{R}_+ =$ 非負實數集合 $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{R}_+^* =$ 正實數集合 $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\overline{\mathbb{R}} =$ 擴張的實數系 $= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $\mathbb{Q} =$ 有理數系
- $\mathbb{Z} =$ 整數系
- $\mathbb{N} =$ 自然數系 $= \{1, 2, 3, \dots\}$
- $N_\delta(p) =$ 點 p 之 δ 鄰近 $= (p - \delta, p + \delta)$ 開區間
- $N_\delta^*(p) = N_\delta(p) \setminus \{p\}$
- $A' =$ 集合 A 之導來集 (derived set)
- $\overset{\circ}{A} =$ 集合 A 之內部 (interior)
- $D_f =$ 函數 f 之定義域 (domain)
- $R_f =$ 函數 f 之值域 (range)
- $f^{-1} =$ 函數 f 之反函數 (inverse function)
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$ 函數 f 與 g 之合成 (composite function)
- $[x] =$ 小於或等於 x 之最大整數, (高斯符號)
- $f(p^+) = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) =$ 函數 f 於點 p 之右極限
- $f(p^-) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) =$ 函數 f 於點 p 之左極限
- $f|_A =$ 函數 f 於集合 A 上之制限 (restriction)
- $f'_+(p) =$ 函數 f 於點 p 之右導數
- $f'_-(p) =$ 函數 f 於點 p 之左導數
- $Z_{f'} = \{x \in D_f \mid f'(x) = 0\}$
- $S_f =$ f 之不可微分之點集
- $U(f, P):$ 上和數 (upper sum)
- $L(f, P):$ 下和數 (lower sum)
- $S(f, P, T):$ Riemann 和數 (Riemann sum)

【解】(a) 若 $0 < a < 1$ ，則 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (a-x)(a^2-x) < 0\} = (a^2, a)$ ，是以 $\sup S = a$ ， $\inf S = a^2$ 。

(b) 若 $a = 1$ ，則 $S = \emptyset$ ，故 $\sup S$ 與 $\inf S$ 皆不存在。

(c) 若 $a > 1$ ，則 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (a-x)(a^2-x) < 0\} = (a, a^2)$ ，是以 $\sup S = a^2$ ， $\inf S = a$ 。

♠ (1-3) 設 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c < 0\}$ 。試問： a, b, c 應滿足什麼條件方使 $\sup S$ 及 $\inf S$ 均存在。此時 $\sup S, \inf S$ 各為何？

【分析】本題之關鍵在於將集合 S 表為區間或其聯集或空集合；但這又與 a 之正負或零，判別式 $b^2 - 4ac$ 之正負或零皆有關，處理之過程應十分小心，步步為營。討論過程讀者不妨繪圖以理解各不同情況下之集合 S 。本題並不難，但可以訓練讀者的數學演繹能力。

【解】1° 若 $a = 0$ ，則

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid bx + c < 0\} = \begin{cases} (-\infty, -c/b), & \text{若 } b > 0, \\ (-c/b, +\infty), & \text{若 } b < 0, \\ \emptyset, & \text{若 } b = 0, c \geq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{若 } b = 0, c < 0. \end{cases}$$

上述四種情況皆不可能使 $\sup S$ 及 $\inf S$ 均存在。

2° 若 $a > 0$ ，(曲線開口向上)，設 $\Delta = b^2 - 4ac$ 。

- 若 $\Delta > 0$ ，令 $r_1 < r_2$ 為方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之二根 (參考圖 1-1A)，則

$$S = \{x \mid ax^2 + bx + c < 0\} = \{x \mid a(x - r_1)(x - r_2) < 0\} = (r_1, r_2),$$

此時， $\sup S = r_2$ ， $\inf S = r_1$ 。

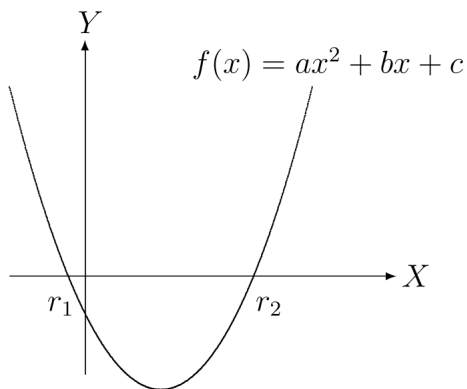


圖 1-1A $a > 0, \Delta > 0$

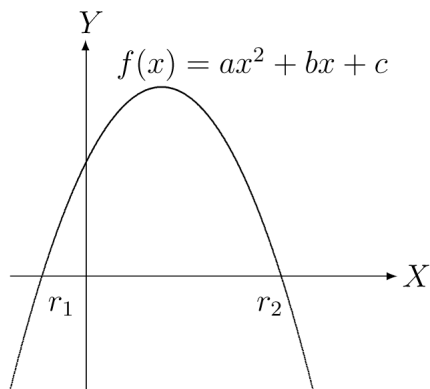


圖 1-1B $a < 0, \Delta > 0$

- 若 $\Delta \leq 0$ ，則 $S = \emptyset$ ， $\sup S$ 及 $\inf S$ 皆不存在。

3° 若 $a < 0$, (曲線開口向下, (參考圖 1-1B)), 則不論 $\Delta = b^2 - 4ac$ 爲正爲負或爲零, 集合 S 既無上界亦無下界, 故 $\sup S$ 及 $\inf S$ 皆不存在.

綜合以上三點, 唯有 $a > 0$ 且 $\Delta > 0$ 時, 方可能使 $\sup S$ 及 $\inf S$ 均存在.

♠ (1-4) 設 A 與 B 爲 $\mathbb{R}$ 之二非空子集, 試證: 若 $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$, 則 $\sup A \leq \inf B$.

分析 $\sup A$ 乃集合 A 諸上界之最小元素, $\inf B$ 乃集合 B 諸下界之最大元素.

【解】

$$\begin{aligned} \forall b \in B, a \leq b &\Rightarrow a \text{ (暫視爲固定) 爲集合 } B \text{ 之一下界} \\ &\Rightarrow a \leq \inf B, \text{ (最大下界大於或等於任一下界)} \\ &\Rightarrow \forall a \in A, a \leq \inf B, \text{ (} a \text{ 爲 } A \text{ 之任意元素)} \\ &\Rightarrow \inf B \text{ 爲 } A \text{ 之一上界} \\ &\Rightarrow \inf B \geq \sup A, \text{ (最小上界小於或等於任一上界)}. \end{aligned}$$

♠ (1-5) 設 A, B 爲 $\mathbb{R}$ 之有上界子集, $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, 試證:

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

分析 對於初學者, 這是一道難題, 困難之處在於無從下手, 解題之主要關鍵在於「某集合之任一上界大於或等於該集合之最小上界」. 本題之結果有助於以下題目之解決:
「試求集合 $C = \{a + 2^{-n} \mid a \in (0, 1), n \in \mathbb{N}\}$ 之最小上界, 若其存在。」

【證】 1° 顯然 $\sup A + \sup B$ 爲 C 之一上界, 故 $\sup A + \sup B \geq \sup C$.

2° 其次, 設 $a \in A, b \in B$;

$$\begin{aligned} \sup C \geq a + b &\Rightarrow \sup C - a \geq b, \forall b \in B \\ &\Rightarrow \sup C - a \geq \sup B \\ &\Rightarrow \sup C - \sup B \geq a, \forall a \in A \\ &\Rightarrow \sup C - \sup B \geq \sup A. \end{aligned}$$

♠ (1-6) 一粒子在一直線上移動, 最初五秒它自固定點 (即原點) 以每秒二公尺之速度移動, 其後三秒它靜止不動, 之後它繼續依照最初移動方向以每秒三公尺前進, 第二十秒時停止.

試將該粒子之位置表為時間 t 之函數. (即表為 $f: A \rightarrow B: f(t) = \dots$, 其中 A, B 及 $\dots$ 皆需清楚表示).

分析 本題之關鍵在於函數定義之瞭解, 及不同情況 (cases) 之表示法. 在此, 先掌握定義域 $A = [0, 20]$ 及對應域 (未必是值域) $B = \mathbb{R}$, 其次將 A 分割為三種情況, 即

$$A = [0, 5] \cup (5, 8] \cup (8, 20],$$

分別求出其函數值.

【解】 所求函數為

$$f: [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}: f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{若 } 0 \leq t \leq 5, \\ 10, & \text{若 } 5 < t \leq 8, \\ 10 + 3(t - 8), & \text{若 } 8 < t \leq 20. \end{cases}$$

其圖形如下 (註: 二軸單位不相同):

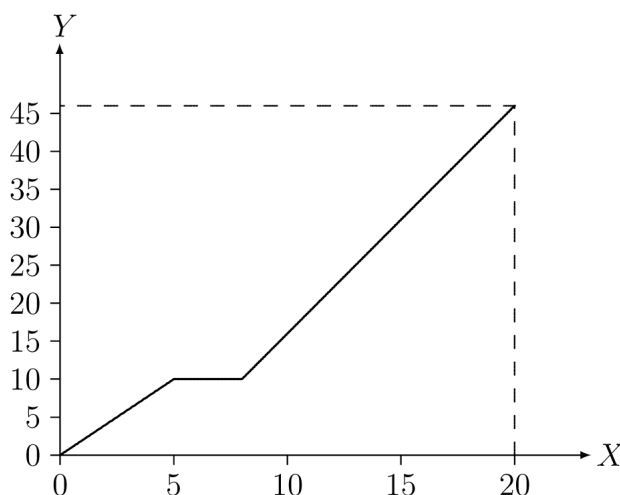


圖 1-2

♠ (1-7) 以下有關『函數』之表示法, 哪些是錯誤的? 理由為何?

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \tan^{-1} x$.
- (b) $z = g(x, y)$ 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- (c) $\mathbf{h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{h}(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$.
- (d) $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \phi(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.
- (e) $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{若 } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

(f) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}: k(x) = [x^2 - 11x + 31]$, 其中 $[\cdot]$ 為高斯符號.

分析 函數之定義是： A (定義域) 中每一元素 x ，必存在 B (對應域) 中唯一元素 y 與之對應. 可能的錯誤是 (1) 自變數 x 所對應之值不只一個，(2) 函數值未界定或無意義，或 (3) 函數值不屬於對應域.

函數 k 的陷阱是 $x^2 - 11x + 31$ 可能有小於 1 之值，取了高斯後其函數值不是自然數. 關於自然數系含不含 0 的問題，目前兩種主張皆有不少支持的學者，在前面「常用數學符號」中已說明我們採用不含 0，即 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

【解】 (a) f 為一函數. 由於 $\tan|_I: I \rightarrow \mathbb{R}$ 為對射，(其中 $I = (-\pi/2, \pi/2)$ ，詳見《微積分學·電子書 2.1 版》第三章定理 3.12)，而 $\tan^{-1}$ 是 $\tan|_I$ 的反函數，其定義域為 $\mathbb{R}$.

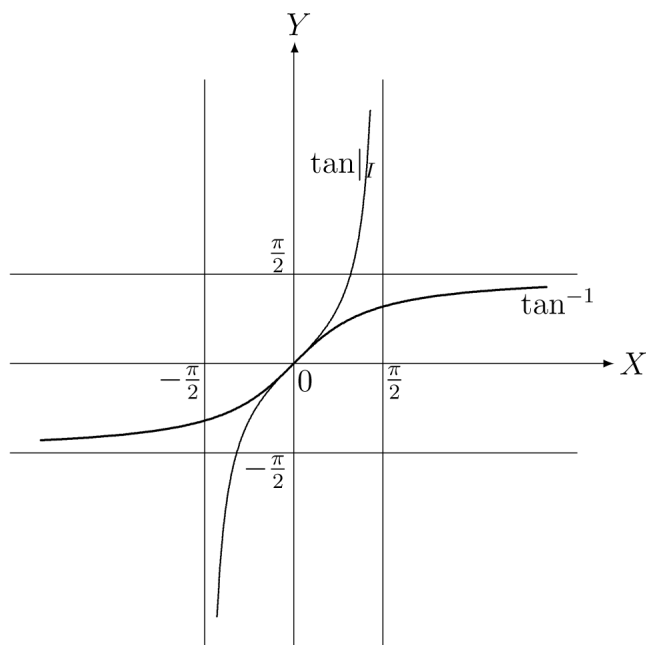


圖 1-3

(b) 不為一函數，因為當 $x = y = 0$ 時， $z = -1$ 或 1 皆滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ；亦即 $g(0,0)$ 有二值，違背函數之定義.

(c) $\mathbf{h}$ 為二維向量函數，詳見《微積分學·電子書 2.1 版》第三章 § 3.13.

(d) 不為一函數，因為 $\phi(0,0,0)$ 無意義.

(e) 這是一種以 cases 方法表示的函數，符合函數定義.

(f) 不為一函數，因為

$$\begin{aligned} x^2 - 11x + 31 &= x^2 - 11x + 5.5^2 + (31 - 5.5^2) \\ &= (x - 5.5)^2 + 0.75. \end{aligned}$$

故 $k(5.5) = [0.75] = 0 \notin \mathbb{N}$.

♠ (1-8) 設 $f(x) = x^2$, 試求具有 $g(x) = Ax + B$ 型式之函數 g 以使 $g(f(x)) = f(g(x))$.

分析 本題若使用雙條件符號 $\Leftrightarrow$, 可使推理過程簡單明瞭. 其次, 在實數系中, $x = x^2$ 之充要條件為 $x \in \{0, 1\}$.

【解】

$$\begin{aligned} g(f(x)) = f(g(x)) &\Leftrightarrow Ax^2 + B = (Ax + B)^2 \\ &\Leftrightarrow Ax^2 + B = A^2x^2 + 2ABx + B^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = A^2, \\ 0 = 2AB, \\ B = B^2, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (A, B) \in \{(0, 1), (1, 0), (0, 0)\}. \end{aligned}$$

故 $g(x) = 0$, $g(x) = x$ 或 $g(x) = 1$ 三者皆可.

♠ (1-9) 設函數 $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{x}{x-1}$.

- (a) 試證 f 為嵌射;
- (b) 試求 f 之反函數.

分析 圖形只能用來理解題目, 通常不能用來證明.

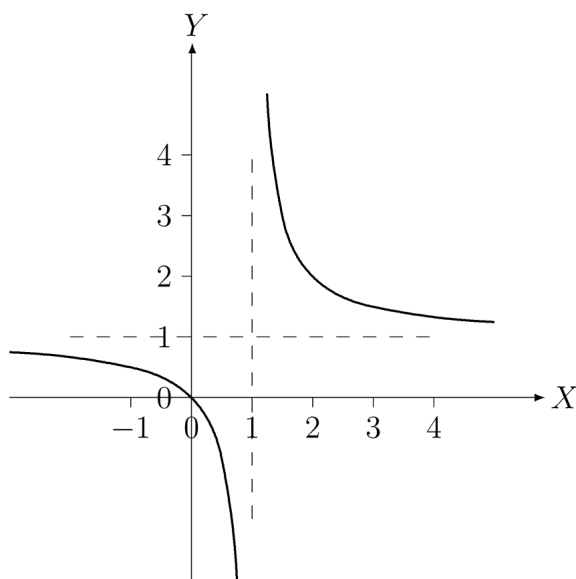


圖 1-4

本題證明 f 為嵌射時，應證： $\forall x_1 \neq x_2 (\in D_f), f(x_1) \neq f(x_2)$ ，可分三種情形去處理。至於反函數問題，由於 $f \circ f^{-1}$ 與 $f^{-1} \circ f$ 均為恒等函數，故

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

因此，求 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 之反函數時，先令

$$y = f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

利用雙條件“ $\Leftrightarrow$ ”方法解 x 為 y 之函數，此即為 f 之反函數 f^{-1} 之作用法則。

【解】(a) 我們分 $1 < x_1 < x_2$ ， $x_1 < x_2 < 1$ 及 $x_1 < 1 < x_2$ 三種情形討論。

$$\bullet \quad 1 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} &> \frac{1}{x_2 - 1} \\ \Rightarrow f(x_1) = 1 + \frac{1}{x_1 - 1} &> 1 + \frac{1}{x_2 - 1} = f(x_2). \end{aligned}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 < 1, \text{ 仿上法證之.}$$

$$\bullet \quad x_1 < 1 < x_2 \text{ 時,}$$

$$f(x_1) = 1 + \frac{1}{x_1 - 1} < 1 < 1 + \frac{1}{x_2 - 1} = f(x_2).$$

(b) 顯然 f 之值域 $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 。由於

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{x-1} &\Leftrightarrow xy - y = x \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1}. \end{aligned}$$

故知 f 之反函數為

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}: f^{-1}(y) = \frac{y}{y-1}.$$

提醒讀者注意：在此， $f^{-1} = f$ 。

♥ (1-10) 設向量函數 $\mathbf{f}: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ 。

(a) 試證 $\mathbf{f}$ 為嵌射；

(b) 試求 $\mathbf{f}$ 之反函數。

分析 向量函數之古典表示法為 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ ，其圖形如圖 1-5。

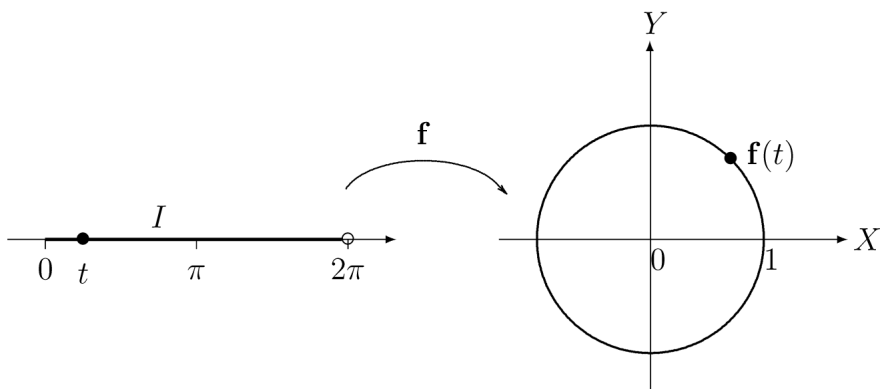


圖 1-5

本題證明 f 為嵌射時，應證： $\forall t_1 \neq t_2 (\in D_f), f(t_1) \neq f(t_2)$ ，可分

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq \pi, \quad \pi < t_1 < t_2 < 2\pi, \quad 0 \leq t_1 \leq \pi < t_2 < 2\pi$$

三種情形去處理。(注意區間之端點)。

至於反函數部分，由於 f 係由 $\sin$ 及 $\cos$ 建構而成，反函數自然應由 $\sin^{-1}$ 及 $\cos^{-1}$ 下手，但必須小心使用。

【解】(a) • 若 $0 \leq t_1 < t_2 \leq \pi$,

$$\begin{aligned} \cos \text{ 在區間 } [0, \pi] \text{ 為遞減} &\Rightarrow \cos t_1 > \cos t_2 \\ &\Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2). \end{aligned}$$

• 若 $\pi < t_1 < t_2 < 2\pi$,

$$\begin{aligned} \cos \text{ 在區間 } (\pi, 2\pi) \text{ 為遞增} &\Rightarrow \cos t_1 < \cos t_2 \\ &\Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2). \end{aligned}$$

• 若 $0 \leq t_1 \leq \pi < t_2 < 2\pi$ ，則因 $\sin t_1 \geq 0$ ， $\sin t_2 < 0$ ，是以

$$f(t_1) = (\cos t_1, \sin t_1) \neq (\cos t_2, \sin t_2) = f(t_2).$$

(b) f 之值域顯然為 $\mathbb{R}^2$ 上之單位圓，即 $R_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 。令

$$g: R_f \rightarrow D_f: g(x, y) = \begin{cases} \cos^{-1} x, & \text{若 } y \geq 0, \\ 2\pi - \cos^{-1} x, & \text{若 } y < 0, \end{cases}$$

為證明 g 為 f 之反函數，應證明： $\forall (x, y) \in R_f, f(g(x, y)) = (x, y)$ ，我們分四種情形證明：

• 若 (x, y) 在第一象限，即 $x \geq 0, y \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(g(x, y)) &= f(\cos^{-1} x) \\ &= (\cos(\cos^{-1} x), \sin(\cos^{-1} x)) \\ &= (\cos(\cos^{-1} x), \sin(\sin^{-1} y)), \quad (\text{理由見 } (*)) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad t = \cos^{-1} x &\Rightarrow x = \cos t \\ &\Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t \\ &\Rightarrow t = \sin^{-1} y. \end{aligned}$$

- 若 (x, y) 在第二象限，即 $x \leq 0, y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(g(x, y)) &= \mathbf{f}(\cos^{-1} x) \\ &= (\cos(\cos^{-1} x), \sin(\cos^{-1} x)) \\ &= (\cos(\cos^{-1} x), \sin(\pi - \sin^{-1} y)), \quad (\text{理由見仿上}) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

- 若 (x, y) 在第三、四象限，讀者自證之
-

§ 2 極限

十七世紀，微積分剛發明時，人類對於『極限』的觀念是模糊的，人們可以求出許多函數在某一點之極限，但沒有人能提出一個能令數學家接受，有關『極限』的嚴格定義。到了十九世紀，法國數學家 Cauchy 才給了極限一個較佳的說法，今天極限的定義則是德國數學家 Weierstrass 經過整理後的結果。有了嚴格定義後，所有定理之證明皆可由定義演繹而得；至於極限題目之解決，當可利用諸定理或直接由定義來處理。有關於極限之定義，讀者可參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第一章。

解決極限問題，l'Hospital's Rule (羅畢達規則) 是一項很好的工具，但它不是萬能鑰匙，於是有些問題特別設計用來考驗讀者是否濫用，另外有些問題雖然極限存在但不是 l'Hospital's Rule 所能解決，還有些問題，雖然屬於不定型，極限卻不存在，必須說明不存在之理由。

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

♠ (2-1) 試利用兩種不同極限定理求 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = ?$

分析 本題之目的在於考驗讀者是否熟悉極限之諸定理，可能知曉其中之一以解決本題，但另一爲何？

【解】法一：利用三明治原理(夾擠定理)，因

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow -|x| \leq x \cos \frac{1}{x} \leq |x|,$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ ，故極限爲 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$ 。

法二：因 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ，且 $\cos \frac{1}{x}$ 爲有界，故二者之積的極限爲 0。

♠ (2-2) 試指出下列論證之錯處，即 (1) 至 (4) 四個蘊含 (implications) 何者不正確？
任予一正數 $\epsilon < 5$ ，我們考慮

$$\begin{aligned} |x^2 - 5| &< \epsilon \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 5 - \epsilon < x^2 < 5 + \epsilon \\ &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{5 - \epsilon} < x < \sqrt{5 + \epsilon} \\ &\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \sqrt{5 - \epsilon} - 2 < x - 2 < \sqrt{5 + \epsilon} - 2 \\ &\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} |x - 2| < \min\{|\sqrt{5 - \epsilon} - 2|, |\sqrt{5 + \epsilon} - 2|\}. \end{aligned}$$

若取 $0 < \delta = \min\{|\sqrt{5-\epsilon}-2|, |\sqrt{5+\epsilon}-2|\}$, 則

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-5| < \epsilon.$$

是故 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 5$.

分析 利用逆推法以證明 ϵ - δ 極限問題時, 常利用以下觀念:

「若 $|x| < \min\{|a|, b\}$, 則 $a < x < b$; 其中 $a < 0 < b$.」

讀者應注意: 如果 a 不為負數時, 不可使用此一蘊含式. 本題很容易發現 (4) 可能有問題, 然而要證明它不對, 則須舉出一反例; 反例越簡單越好, 但必須十分清楚.

【解】 第四個蘊含不正確, 理由: 令 $x = 2.1$, $\epsilon = 0.1$, 則

$$\begin{cases} \sqrt{5-\epsilon}-2 < x-2 < \sqrt{5+\epsilon}-2 & \text{不真,} \\ |x-2| < \min\{|\sqrt{5-\epsilon}-2|, |\sqrt{5+\epsilon}-2|\} & \text{爲真.} \end{cases}$$

♠ (2-3) 利用 ϵ - δ 方法證明: $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + bx + c) = a^2 + ab + c$.

分析 由給定的正數 ϵ , 去找尋正數 δ , 並證明它是正確的, 解決之道往往需要使用「逆推法」. 其過程又分「平行法」及「分解法」, 讀者請參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》§1.3 之諸範例, 本題需使用「分解法」, 在此, 問題是在區間 $(a-1, a+1)$ 上找到 $|x+a+b|$ 之一上界 M .

【證】 往證:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 + bx + c - (a^2 + ab + c)| < \epsilon).$$

1° 先求在區間 $(a-1, a+1)$ 上 $|x+a+b|$ 之一上界 M .

$$\begin{aligned} |x-a| < 1 &\Rightarrow a-1 < x < a+1 \\ &\Rightarrow 2a+b-1 < x+a+b < 2a+b+1 \\ &\Rightarrow |x+a+b| < M, \quad (\text{令 } M = \max\{|2a+b-1|, |2a+b+1|\}) \end{aligned}$$

2° 對於 $\epsilon > 0$, 由

$$\begin{aligned} |x^2 + bx + c - (a^2 + ab + c)| < \epsilon &\Leftrightarrow |x^2 - a^2 + b(x-a)| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |x-a| \cdot |x+a+b| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |x-a| < \frac{\epsilon}{M} \wedge |x+a+b| < M \\ &\Leftrightarrow |x-a| < \frac{\epsilon}{M} \wedge |x-a| < 1, \quad (\because 1^\circ) \\ &\Leftrightarrow |x-a| < \min\left\{\frac{\epsilon}{M}, 1\right\}. \end{aligned}$$

只需令 $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{M}, 1\right\}$ 即可.

♠ (2-4) 利用 ϵ - δ 方法證明： $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 5$.

分析 本題和上題相似，利用「逆推法」之「分解法」. 上題第一步考慮之鄰近半徑為 1，本題則必須小於 1，否則解不出來.

【證】 往證：

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})(0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 1}{x - 1} - 5 \right| < \epsilon).$$

1° 先求在區間 $\left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right)$ 上 $\left| \frac{x - 3}{x - 1} \right|$ 之一上界.

$$\begin{aligned} |x - 2| < \frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} < x - 1 < \frac{3}{2} \quad \& \quad -\frac{3}{2} < x - 3 < -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 2 > \frac{1}{x - 1} > \frac{2}{3} \quad \& \quad |x - 3| < \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \left| \frac{x - 3}{x - 1} \right| < 3. \end{aligned}$$

2° 對於 $\epsilon > 0$ ，由

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 + 1}{x - 1} - 5 \right| < \epsilon &\Leftrightarrow |x - 2| \cdot \left| \frac{x - 3}{x - 1} \right| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{3} \quad \& \quad \left| \frac{x - 3}{x - 1} \right| < 3 \\ &\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{3} \quad \& \quad |x - 2| < \frac{1}{2}, \quad (\because 1^\circ) \\ &\Leftrightarrow |x - 2| < \min\left\{\frac{\epsilon}{3}, \frac{1}{2}\right\} \\ &\Leftrightarrow 0 < |x - 2| < \delta, \quad \left(\text{令 } \delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{3}, \frac{1}{2}\right\}\right) \end{aligned}$$

♠ (2-5) 若 $f(x) \leq M, \forall x \in D_f$ ，且 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ ，利用 ϵ - δ 方法證明： $A \leq M$.

分析 依題意本題不可使用極限之定理，必須使用極限之定義. 可使用直接證法或間接證法 (即矛盾證法).

【證】 • 直接證法：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} f(x) = A &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f (0 < |x - p| < \delta \Rightarrow A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon) \\ &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x \in D_f, A - \epsilon < f(x) \\ &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, A - \epsilon < M \\ &\Rightarrow M \geq \sup\{A - \epsilon \mid \epsilon > 0\} = A. \end{aligned}$$

- 間接證法：假定「 $A > M$ 」，我們將證明其將導致矛盾。令 $\epsilon = A - M > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in D_f (0 < |x - p| < \delta \Rightarrow A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon)$$

$$\Rightarrow \exists x \in D_f, A - \epsilon < f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x \in D_f, M < f(x), \quad (\text{與原設相矛盾}).$$

♠ (2-6) 設 $f(x)$ 爲一多項式且滿足

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 3,$$

試求最低次數之多項式 f .

分析 若 $f(x)$ 不含 $x-1$ 因式，則 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ 不可能等於 1，同理 $f(x)$ 必含 $x-2$ 及 $x-3$ 因式。但若 $f(x) = k(x-1)(x-2)(x-3)$ ，(k 爲一常數)，仍不符合原題之三個極限值。因此 k 應非常數而是一多項式。

【解】 由原設知 $f(x)$ 必有 $(x-1)$ 、 $(x-2)$ 及 $(x-3)$ 三因式，是以

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x),$$

內 $Q(x)$ 爲一待定多項式，其次，

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2Q(1),$$

$$2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -Q(2),$$

$$3 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2Q(3),$$

知多項式 $Q(x)$ 通過點 $(1, \frac{1}{2})$ 、 $(2, -2)$ 、 $(3, \frac{3}{2})$ ，最低次應爲二次（拋物線），令 $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ，應有

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = Q(1) = a + b + c, \\ -2 = Q(2) = 4a + 2b + c, \\ \frac{3}{2} = Q(3) = 9a + 3b + c, \end{cases}$$

聯立之，解得 $a = 3$ ， $b = -\frac{23}{2}$ ， $c = 9$ ，換言之，

$$f(x) = \frac{1}{2}(6x^2 - 23x + 18)(x-1)(x-2)(x-3).$$

♠ (2-7) 試求極限 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^{10} - 1024}{[x^{10}] - 1024} = ?$ 內 $[\cdot]$ 乃最大整數函數.

分析 有些初學者以為，求極限 $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ 時，只需將 p 代入 $f(x)$ 之 x ，當然是錯誤的.

本題的關鍵在於：考慮在區間 $(a, 2)$ ，函數值為何？其中 $a < 2$ ，但又很接近 2.

【解】 由於

$$\begin{aligned} 1023^{1/10} < x < 2 &\Rightarrow 1023 < x^{10} < 1024 \Rightarrow [x^{10}] = 1023 \\ &\Rightarrow [x^{10}] - 1024 = -1 \\ &\Rightarrow \frac{x^{10} - 1024}{[x^{10}] - 1024} = 1024 - x^{10}, \end{aligned}$$

$$\text{故極限 } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^{10} - 1024}{[x^{10}] - 1024} = 0.$$

註：本題若改問 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^{10} - 1024}{[x^{10}] - 1024} = ?$ 答案是：本題無意義. 理由是在區間 $(2, 1025^{1/10})$

上， $\frac{x^{10} - 1024}{[x^{10}] - 1024}$ 之分母為 0.

♠ (2-8) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x - [x]$ (稱為尾數函數 (mantissa)). 試求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$ 內 $[\cdot]$ 乃最大整數函數.

分析 證明一極限 $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ 不存在時，我們常使用的方法是：取定義域之二子集 A 與 B ，

且 $\lim_{x \rightarrow p} f|_A(x) \neq \lim_{x \rightarrow p} f|_B(x)$. 其中 $p \in \mathbb{R}$ 或 $p \in \{-\infty, +\infty\}$ 皆可.

(由於 f 之定域為 $\mathbb{R}$ ，函數圖形只能繪出其中部分，其餘部分需要想像.)

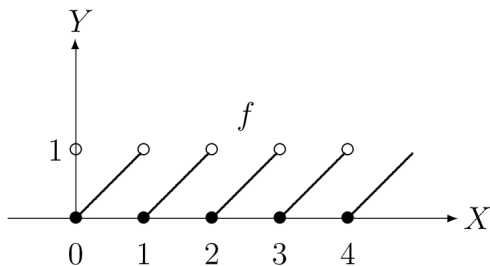


圖 2-1

【解】 令 $f(x) = x - [x]$, $A = \{n + 0.5 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1.5, 2.5, 3.5, \dots\}$, 則

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f|_{\mathbb{N}}(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f|_A(x) = 0.5, \end{cases}$$

二制限之極限不相等，故極限不存在。

♠ (2-9) 試求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{[-x]} = ?$ 內 $[\cdot]$ 乃最大整數函數。

分析 本題看起來不難，但若對於極限觀念不十分清楚者，可能會認為它的右極限不存在而斷定：本題之極限不存在。其實，應先了解函數之定義域，再看看趨近點 0 之鄰近的函數值。

【解】 令 $f(x) = \frac{1}{[-x]}$ ，則其定義域

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \mid [-x] \neq 0\} = \{x \mid -x \notin [0, 1)\} \\ &= \{x \mid x \leq -1 \text{ or } x > 0\} = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty). \end{aligned}$$

其次，

$$x \in (0, 1] \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow f(x) = -1,$$

$$\text{是以 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{[-x]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-1} = -1.$$

♠ (2-10) 試求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{[x]}{x-1} \right) = ?$ 內 $[\cdot]$ 乃最大整數函數。

分析 本題屬於合成函數之極限問題，若內層函數之極限存在，外層函數為連續（至少連續於內層之極限值），則可將外層函數提到 $\lim$ 之外。

【解】 由括號函數之定義知，

$$\begin{aligned} \forall x > 1 &\Rightarrow x - 1 < [x] \leq x \\ &\Rightarrow 1 < \frac{[x]}{x-1} \leq \frac{x}{x-1}, \end{aligned}$$

利用三明治原理得， $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x-1} = 1$ 。又 $\ln$ 為連續函數，是以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{[x]}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x-1} \right) = \ln 1 = 0.$$

♠ (2-11) 設 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ， $g(x) = \sqrt{4x-x^2-3}$ 。

(a) 試求： $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$ 及 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = ?$

(b) 試問：

$$“ \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) ”$$

是否為真？理由為何？

分析 本題之 (a) 小題是容易的，但 (b) 小題則是觀念性問題。如果先審查和函數 $f + g$ 之定義域，必會發現答案其實十分簡單。

【解】 (a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2)} = 0$; (注意： $D_f = [-1, 1]$.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} (4x - x^2 - 3)} = 0; \text{ (注意： } D_g = [1, 3]. \text{)}$$

(b) $f + g$ 之定義域為

$$\begin{aligned} D_{f+g} &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0 \ \& \ 4x - x^2 - 3 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1 \ \& \ (x - 2)^2 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \ \& \ 1 \leq x \leq 3\} = \{1\}. \end{aligned}$$

D_{f+g} 並無聚點， $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ 無意義，等式顯然不真。

♠ (2-12) 令函數 $f: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ 且 $a \in (c, d)$ 。若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ ，則下列何者恆成立？
(複選，全對才給分)。

(a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$. (b) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2$. (c) $f(a) = 2$.

(d) $f(a) > 1$. (e) 滿足 $f(x) > 1$ 的數 x 有無限多個。

分析 本題若加入「 f 為連續」，顯然 (a) ~ (e) 五者全部成立，陷阱就在此處，我們應考慮：當 f 不為連續時之情形。

【解】 (a), (b), (e). 理由如下：

(a) 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ (存在)，故其右極限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$ ；

(b) 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ (存在)，故其左極限 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2$ ；

(c) 未必成立，例如 $f: (c, d) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 2, & \text{若 } x \neq a, \\ 0, & \text{若 } x = a; \end{cases}$

(d) 未必成立，反例與 (c) 小題相同；

(e) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ ，由保號定理 (sign-preserving theorem) [†] 知存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall x \in N_\delta^*(a) \cap (c, d) \Rightarrow f(x) > \frac{2}{2} = 1.$$

其中 $N_\delta^*(a) \cap (c, d) = N_\delta^*(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ 為一無限集合。

[†] 拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第一章定理 1.11.

♠ (2-13) 試求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x^2+1) \cdots (x^n+1)}{((nx)^n+1)^{(n+1)/2}}$. 內 n 為大於 1 之自然數.

分析 分子及分母分別將 x 提出來即可.

【解】 由於

$$\begin{aligned}\text{函數之分子} &= x^{1+2+\cdots+n} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \\ &= x^{n(n+1)/2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right), \\ \text{函數之分母} &= x^{n(n+1)/2} \left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{(n+1)/2},\end{aligned}$$

是以

$$\text{原題} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{(n+1)/2}} = n^{-n(n+1)/2}.$$

♠ (2-14) 試求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - e^x) = ?$.

分析 本題屬於 $\infty - \infty$ 不定型，此類題目應先設法化為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，再利用 l'Hospital 規則.

【解】 利用 l'Hospital 規則， $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$ ，故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right) = +\infty \cdot (0 - 1) = -\infty.$$

♠ (2-15) 試求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = ?$

分析 有人認為：當 x 很小時， $\sin x$ 與 x 差不多，因而斷定本題之極限為 0.

【解】 使用三次 l'Hospital 規則，

$$\begin{aligned}\text{原題} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{12x^2}, \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{24x} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

♠ (2-16) 試求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^x} - x^x) = ?$

分析 遇到指數型態之函數先利用定義 $a^b = \exp(b \ln a)$, 其中 $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

【解】 1° 首先,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x \ln x) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{1}\right) = 1.$$

2° 由 1° 知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

$$\text{是以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x^x \ln x) = 0.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^x} - x^x) = 0 - 1 = -1.$$

♠ (2-17) 試問下列各題可以使用 l'Hospital 規則解出嗎? 請說明你的理由並求極限.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\cos x}.$$

分析 有些微積分初學者, 只要看到不定型問題立即以 l'Hospital 規則解題, 有時就會遇到麻煩, 只好另行尋找解決之道. 至於 (b) 題則不屬於不定型問題, 當然不可使用 l'Hospital 規則.

【解】 (a) 不可使用 l'Hospital 規則, 因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(x - \sin x)}{Dx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \cos x) \text{ 不存在, 理由如下:}$$

$$\text{令 } f(x) = 1 - \cos x, \quad A = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}, \text{ 而}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f|_A(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f|_B(x) = 2.$$

但

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1 - 0 = 1,$$

$$\text{其中因 } |\sin x| \leq 1, \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(b) 不可使用 l'Hospital 規則, 因為分子之極限為 $\cos(\sqrt{\pi/2}) > 0$. 而

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\cos \sqrt{x}}{\cos x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos \sqrt{x}}{\cos x} = +\infty.$$

故知本題之極限不存在.

♠ (2-18) 試求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n!} = ?$

分析 本題雖為 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定型，然此處之 n 指的是正整數，因此，分子分母對於 n ，均不能求導數，與 l'Hopital 規則之條件不符，自然不可利用 l'Hospital 規則。方法有二，其一，利用三明治原理。其二，利用級數之定理。

【解】 法一：因為 $\forall n \geq 4$,

$$0 \leq \frac{e^n}{n!} = \frac{e \cdot e \cdot e \cdots e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{e \cdot e}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{e}{3} \cdots \frac{e}{n-1} \right) \cdot \frac{e}{n} < \frac{e^3}{2n},$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^3}{2n} = 0, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n!} = 0.$$

法二：利用級數之比值審斂法(ratio test)，考慮級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$ ，由於

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} e \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

知級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$ 為收斂，故其通項之極限（當 $n \rightarrow +\infty$ ）為 0。

♠ (2-19) 試求 a 之值以使極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - 3x}{x^2}$ 存在，並求此極值。

分析 分母之極限顯然為 0，若分子之極限不為 0，則極限不存在。

【解】 由於 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax} - e^x - 3x) = 1 - 1 - 0 = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ，我們考慮利用 l'Hospital 規則，

$$\text{原題} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a e^{ax} - e^x - 3}{2x} \quad (*)$$

1° 若 $a = 4$ ，則由 (*) 再使用 l'Hospital 規則，

$$\text{原題} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a e^{ax} - e^x - 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 e^{ax} - e^x}{2} = \frac{a^2 - 1}{2} = \frac{15}{2}.$$

2° 若 $a > 4$ ，在 (*) 式中，因分子分母極限分別為

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a e^{ax} - e^x - 3) = a - 1 - 3 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0,$$

知 $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{a e^{ax} - e^x - 3}{2x} = \pm\infty$ ，即原題之極限不存在。

3° 若 $a < 4$ ，則因

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a e^{ax} - e^x - 3) = a - 1 - 3 < 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0,$$

知 $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{a e^{ax} - e^x - 3}{2x} = \mp\infty$ ，即原題之極限不存在。

結論：唯有當 $a = 4$ 時，此極限方存在。

與「l'Hospital 規則」有關之極限問題為數甚多，拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第四章 §4.7, 176 ~ 183 頁，有較為系統化之整理。

【解】由函數 g 之定義知其在 $x = 2$ 之外的點必為連續，而

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = |4c| + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 4 - 2c.$$

是以

$$\begin{aligned} g \text{ 在點 } 2 \text{ 為連續} &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2) \\ &\Leftrightarrow |4c| + 1 = 4 - 2c \\ &\Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \text{ or } -\frac{3}{2}, \quad (\text{理由見 } (*)). \end{aligned}$$

$$(*) \text{ 若 } c \geq 0, \quad 4c + 1 = 4 - 2c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2};$$

$$\text{若 } c < 0, \quad -4c + 1 = 4 - 2c \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2}.$$

♠ (3-3) 試求常數 c 與 k 使得函數

$$f(x) = \begin{cases} x + 2c, & \text{若 } x < -2, \\ 3cx + k, & \text{若 } x \in [-2, 1], \\ 3x - 2k, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$$

於 $\mathbb{R}$ 上為連續.

分析 函數 f 在以下三區間 $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, +\infty)$ 上顯然皆為連續，因此只需考慮在點 -2 及點 1 之左右極限，而獲得含 c, k 之聯立方程式.

【解】 • 由原設

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 2c) = -2 + 2c,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3cx + k) = 3c(-2) + k,$$

$$\text{題意：} f \text{ 於點 } -2 \text{ 為連續} \Rightarrow f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x), \text{ 故}$$

$$8c - k = 2 \quad \text{①}$$

• 由原設

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3cx + k) = 3c + k,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2k) = 3 - 2k,$$

$$\text{題意：} f \text{ 於點 } 1 \text{ 為連續} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \text{ 故}$$

$$3c + 3k = 3 \quad \text{②}$$

$$\text{①, ② 兩式聯立可得 } c = \frac{1}{3}, \quad k = \frac{2}{3}.$$

♠ (3-4) 設 $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$, 內 $[\cdot]$ 乃最大整數函數.

(a) 試求 f 之定義域及不連續點集合.

(b) 試求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

分析 $[x]$ 在整數點不為連續, 因此, 當 $\sqrt{x}$ 為整數時, 應特別留心.

【解】 (a) 顯然 $D_f = [0, +\infty)$, 其次, 令 $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- 在區間 $[0, 1)$

$$x \in [0, 1) \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}.$$

顯然 f 為連續於區間 $[0, 1)$.

- 在區間 $(n^2, (n+1)^2)$ 上, 其中 $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in (n^2, (n+1)^2) &\Rightarrow n < \sqrt{x} < n+1 \\ &\Rightarrow f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] = \sqrt{x} - n, \end{aligned}$$

顯然 f 為連續於區間 $(n^2, (n+1)^2)$.

- 若 $p \in A$, 則

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} \sqrt{x} - [\sqrt{x}] = \sqrt{p} - (\sqrt{p} - 1) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} \sqrt{x} - [\sqrt{x}] = \sqrt{p} - \sqrt{p} = 0;$$

知 f 在點 p 不為連續;

綜合以上三點知 f 之不連續點集為 $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(b) 令 $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{(n-0.5)^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. 則

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f|_A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2} - [\sqrt{n^2}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} n - [n] = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f|_B(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{(n-0.5)^2} - [\sqrt{(n-0.5)^2}] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n-0.5) - [n-0.5] = 0.5. \end{aligned}$$

故知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在.

♠ (3-5) 設 n 為一正偶數, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 均為非零實數. 試證: 方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x = 0$$

至少有二相異實根.

分析 一函數若其值域為 $\mathbb{R}$, 則其圖形必與 X 軸相交, 交點乃為一根.

【證】設

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x = x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1).$$

顯然 0 為原方程式之一根。其次令 $g(x) = x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ ，則因

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-1} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{n-1} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right) = -\infty,\end{aligned}$$

且 g 為連續，故 g 之值域為 $\mathbb{R}$ ，又 $g(0) = a_1 \neq 0$ ，故方程式 $g(x) = 0$ 必有一非零之實根。

♠ (3-6) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續且滿足 $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$ 。試證： f 為一線性函數，亦即存在一常數 a 以使 $f(x) = ax$ 。

分析 本題屬於較為理論的思考題，《微積分》本來就不限制在計算，應用所有《微積分》定義及定理設法解決題目所要求之解答或證明。在此必須分幾個階段討論。 $f(0) = ?$
 $f(\frac{1}{n}) = ?$ $f(r) = ?$ (r 為有理數)，最後利用連續性證明所需之結果。

【證】1° 利用數學歸納法，我們可證得：

$$f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n).$$

2° 由 $f(0) = f(0) + f(0)$ 知， $f(0) = 0$ 。又令 $a = f(1)$ 。

3° $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}f(1) &= f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \quad (n \text{ 項和}) \\ &= f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\because 1^\circ) \\ &= nf\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

$$\text{故 } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1) = \frac{a}{n}.$$

4° 若 r 為一正有理數，則 $r = \frac{m}{n}$, ($m, n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}f(r) &= f\left(\frac{m}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \quad (m \text{ 項和}) \\ &= mf\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot \frac{a}{n}, \quad (\because 3^\circ) \\ &= ar.\end{aligned}$$

5° 若 r 爲一負有理數，則 $-r$ 爲一正有理數，而

$$f(0) = f(r - r) = f(r) + f(-r),$$

是以 $f(r) = -f(-r) = -(-r)a = ra$.

6° 若 p 爲一無理數，則

$$f(p) = \lim_{x \rightarrow p} f(x), \quad (\text{連續性})$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} f|_{\mathbb{Q}}(x), \quad (\text{因極限存在})$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} ax = ap.$$

♠ (3-7) 設 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 均爲連續函數，試證：函數 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 亦爲連續。

分析 小學數學「和差問題」有公式：大數 = (和 + 差)/2。以微積分符號表示則爲：

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad \max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

(證明不難)。

【證】 由於

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|),$$

是以

$$f, g \text{ 爲連續} \Rightarrow f - g \text{ 爲連續} \Rightarrow |f - g| \text{ 爲連續} \Rightarrow h \text{ 爲連續}.$$

♠ (3-8) 一登山者於週六早上四點登山，中午到達山頂過夜，隔天(週日)早上五點循原路下山，於上午十一點到達山腳出發點。試證：該登山者在登山路線上某點於上、下山兩天中其手錶呈現同樣時間。

分析 本題之困難在於如何將題意以數學形式表達出來，之後又能證明「上、下山手錶呈現同樣時間」。

【證】 自山腳出發點至山頂依里程標以 0 公里至 M 公里。上山時可視爲函數

$$f: [4, 12] \rightarrow [0, M]: f(t) = \text{在時間 } t \text{ 登山者(上山)之位置};$$

(註： $f(4) = 0$ 這是起點， $f(12) = M$ 這是終點)。下山時則可視爲函數

$$g: [5, 11] \rightarrow [0, M]: g(t) = \text{在時間 } t \text{ 登山者(下山)之位置}.$$

(註： $g(5) = M$, $g(11) = 0$)。由於

- (1) 由於 f 與 g 皆為連續，故 $g - f$ 於區間 $[5, 11]$ 為一連續函數；
 (2) $(g - f)(5) = g(5) - f(5) = M - f(5) > 0$, ($\because f(5) < M$) ;
 (3) $(g - f)(11) = g(11) - f(11) = 0 - f(11) < 0$, ($\because f(11) > 0$) ;

利用 Bolzano 截根定理, 知存在 $t_0 \in (5, 11)$ 使得 $(g - f)(t_0) = 0$, 亦即 $g(t_0) = f(t_0)$, 換言之, 手錶所呈之時間為 t_0 時, 上、下山在同一地點.

♠ (3-9) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續且滿足 $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, 試證: 方程式 $f(x) = x$ 有實數解.

分析 利用連續性的介質定理以證明: 若函數為恆正或恆負時為矛盾.

【證】 間接證法.

$f(x) = x$ 無實數解

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left[f(x) - x \text{ 恆正或恆負} \right], \text{ (介質定理)} \\ &\Rightarrow \left[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x \right] \text{ or } \left[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x \right] \\ &\Rightarrow \left[\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) > f(x) > x \right] \text{ or } \left[\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) < f(x) < x \right]. \end{aligned}$$

最後一式與原設 $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ 相矛盾.

註: 可能有人好奇, $f(x) = ?$ 答案是: 只需滿足 $f = f^{-1}$ 即可, 例如: $f(x) = k - x$,

k 為一常數; 又, 函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$ 亦可.

§ 4 導數運算

在《微積分學》中，導數運算屬於較為容易的部分，我們需要使用 (1) 導數之定義，(2) 函數四則運算（和差積商）之導數公式，(3) 微分連鎖律及 (4) 可微及連續關係等，仍然建議讀者參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第二章。面對問題時，絕不只是「套公式」就能解決問題。有一些精心設計的題目，常用以測驗初學者是否了解導數之定義及定理的真正內涵。

A horizontal row of 26 small circles, each containing a single letter of the alphabet from A to Z. The colors of the circles are as follows: A (white), B (red), C (blue), D (white), E (red), F (blue), G (white), H (red), I (blue), J (white), K (red), L (blue), M (white), N (red), O (blue), P (white), Q (red), R (blue), S (white), T (red), U (blue), V (white), W (red), X (blue), Y (white), Z (blue).

♠ (4-1) 試求函數

$$f: [0, 20] \rightarrow \mathbb{R} : f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{若 } 0 \leq t \leq 5, \\ 10, & \text{若 } 5 < t \leq 8, \\ 10 + 3(t - 8), & \text{若 } 8 < t \leq 20. \end{cases}$$

之導函數。(註： f 為第 (1-6) 題粒子運動之函數。)

分析 本題之關鍵在於點 5 及點 8，有人以為 $0 \leq t \leq 5$, $f(t) = 2t$ ，故 $f'(t) = 2$ ．當 p 之左右分屬不同函數時， f 在點 p 是否可微應考慮左右導數．

【解】 1° 當 $0 \leq t < 5$, $f(t) = 2t$, $f'(t) = 2$;
 2° 當 $5 < t < 8$, $f(t) = 10$, $f'(t) = 0$;
 3° 當 $8 < t \leq 20$, $f(t) = 10 + 3(t - 8)$, $f'(t) = 3$;
 4° 當 $t = 5$, 由於 f 在點 5 之左右導數分別為

$$\begin{aligned} f'_-(5) &= \lim_{t \rightarrow 5^-} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5^-} \frac{2t - 10}{t - 5} = 2, \\ f'_+(5) &= \lim_{t \rightarrow 5^+} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5^+} \frac{10 - 10}{t - 5} = 0, \end{aligned}$$

二者不相等，故知 f 在點 5 不為可微。

5° 同理, $f'_-(8) = 0$, $f'_+(8) = 3$, 知 f 在點 8 不為可微.

綜合以上各點，得 f 之導函數為

$$f: [0, 20] \setminus \{5, 8\} \rightarrow \mathbb{R} : f(t) = \begin{cases} 2, & \text{若 } 0 \leq t < 5, \\ 0, & \text{若 } 5 < t < 8, \\ 3, & \text{若 } 8 < t \leq 20. \end{cases}$$

♠ (4-2) 設常數 $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$, 函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{若 } x \geq a, \\ ax + b, & \text{若 } x < a, \end{cases}$

試求 a 與 b 以使 f 於點 a 爲可微分.

分析 可以先繪圖．別忘了「 f 於點 a 為可微分」必有「 f 於點 a 為連續」條件．由此二條件可以解出 a 與 b ．

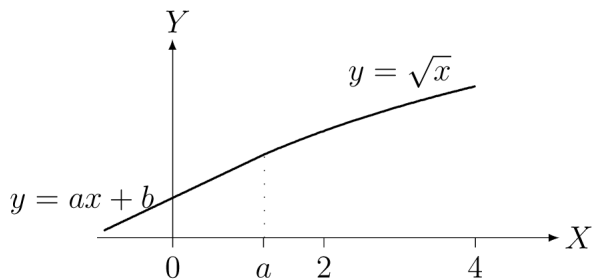


圖 4-1

【解】1° f 在點 a 為連續

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(a) &= \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \\ \Rightarrow \sqrt{a} &= a^2 + b\end{aligned}\quad ①$$

2° f 在點 a 為可微分

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'_-(a) &= f'_+(a) \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{4^{1/3}}\end{aligned}\quad ②$$

② 代入 ① 可解出 $b = \frac{1}{2^{1/3}} - \frac{1}{2^{4/3}}$.

♠ (4-3) 試微分 $f(x) = \frac{|x|}{[x]}$ ，其中 $[\cdot]$ 為高斯符號。

【分析】本題看起來似乎很簡單，其實遇到高斯符號，整數點與非整數點就必須分別考慮，此外，本題 $[x]$ 在分母，又必須注意分母是否為 0 之問題。

【解】1° 顯然 $D_f = \mathbb{R} \setminus [0, 1)$ ， $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{[x]}, & \text{若 } x \geq 1, \\ \frac{-x}{[x]}, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$

2° $\forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ ，因 $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \frac{|p|}{p-1} \neq \frac{|p|}{p} = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ ，知 f 於點 p 不為連續，因此亦不為可微分。

3° 當 $p = 1$ 時， $f'(1) = f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$ 。

4° $\forall x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}$ ， $f'(x) = \frac{-1}{[x]}$ ；($\because [x]$ 在區間 $(n, n+1)$ 為常數， $n \in \mathbb{Z}$.)

5° $\forall x \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{Z}$ ， $f'(x) = \frac{1}{[x]}$ ；(理由與 4° 相同.)

$$\text{結論：} f': \mathbb{R} \setminus [0, 1) \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{[x]}, & \text{若 } x > 1 \text{ 且 } x \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{-1}{[x]}, & \text{若 } x < 0 \text{ 且 } x \notin \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{若 } x = 1. \end{cases}$$

♠ (4-4) 設 $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ，試求 f 之導函數。

分析 此類題目應先求函數之定義域。求導函數時應注意端點。

【解】 1° 顯然 $D_f = [0, +\infty)$ ；

$$2^\circ \quad \forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right];$$

3° f 在點 0 不為可微分，因為

$$\forall x > 0, \quad \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x} \geq \frac{\sqrt{x}}{x},$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$ ，故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x} = +\infty.$$

$$\text{結論：} f': (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right].$$

類題：設 $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}}$ ，試問 f 在點 1 是否為可微分？

♠ (4-5) 設 $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1-x}$ 。試求 f 之 n 階導函數。

分析 求函數 f 之 n 階導函數，困難之處在於如何由 f 之二、三、四階導數歸納而得，在此，最簡單方法是將函數表為「指數型態」。

【解】 1° 顯然 $D_f = (-\infty, 1]$ ， $f(x) = (1-x)^{1/2}$ ；

2° 若 $x < 1$ ，則 $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$ ；但 f 在點 1 不為可微分，因

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty.$$

3° 其次, $\forall x < 1$,

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-3/2},$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (1-x)^{-5/2},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (1-x)^{-7/2}.$$

我們可歸納得 $f^{(n)}: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n} \cdot (1-x)^{-(2n-1)/2}.$$

♠ (4-6) 設 $f(x) = \frac{4-4x^2}{1+2x}$, 試求 $f^{(101)}(0) = ?$

分析 本題和上題相似, 困難之處在於如何由 f 之二、三階導數歸納而得 n 階導數, 方法仍是將函數表為「指數型態」.

【解】 $\forall x \neq -1/2$,

$$f(x) = \frac{4-4x^2}{1+2x} = -2x + 1 + 3(1+2x)^{-1},$$

是以

$$f'(x) = -2 + 3 \cdot (-1) \cdot 2(1+2x)^{-2},$$

$$f''(x) = 3 \cdot (-1)(-2) \cdot 2^2(1+2x)^{-3},$$

$$f'''(x) = 3 \cdot (-1)(-2)(-3) \cdot 2^3(1+2x)^{-4},$$

我們可歸納而得

$$f^{(n)}(x) = 3(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n (1+2x)^{-(n+1)}. \quad (\star)$$

故得 $f^{(101)}(0) = -3 \cdot 101! \cdot 2^{101}$.

註: 若欲嚴格證明 $(\star)$ 式, 應利用數學歸納法.

♠ (4-7) 設 $g(x) = \frac{[x]}{1+|x|}$, 試求 $g'(x)$, 其中 $[\cdot]$ 為高斯符號.

分析 本題並不難, 首先必須考慮 g 在整數點是否全部不連續; 其次, 對於帶有 $|x|$ 的問題, 應分為 $x \geq 0$ 及 $x < 0$ 二種情況討論. 此外, $[x]$ 在每個區間 $(n, n+1)$ 上皆為常數函數 n .

【解】 $D_g = \mathbb{R}$.

1° $\forall n \in \mathbb{Z}$, 由於 g 在點 n 之左右極限分別為

$$g(n^-) = \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{[x]}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{n-1}{1+|x|} = \frac{n-1}{1+|n|},$$

$$g(n^+) = \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{[x]}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{n}{1+|x|} = \frac{n}{1+|n|},$$

二者顯然不相等, 故 g 在數 n 點不連續, 是以知 g 在整數點皆不為可微.

2° $0 \leq n < x < n+1, n \in \mathbb{Z}, g(x) = \frac{n}{1+x}$, 是以

$$g'(x) = \frac{-n}{(1+x)^2} = \frac{-[x]}{(1+x)^2}.$$

3° $n < x < n+1 \leq 0, n \in \mathbb{Z}, g(x) = \frac{n}{1-x}$, 是以

$$g'(x) = \frac{n}{(1-x)^2} = \frac{[x]}{(1-x)^2}.$$

綜合以上三點

$$g': \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : g'(x) = \begin{cases} \frac{-[x]}{(1+x)^2}, & \text{若 } x > 0, \\ \frac{[x]}{(1-x)^2}, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

♠ (4-8) 設 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in (0, +\infty), f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. 但不預知 $f = \ln$.

(a) 試求 $f(1) = ?$ 並證明: 若 f 在點 $x = 1$ 為連續, 則 f 在 $(0, +\infty)$ 上各點皆為連續.

(b) 試證: 若 $f'(1) = 1$, 則 $\forall x \in (0, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x}$.

分析 欲證明函數在某點為連續時, 應證明 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$, 若令 $x = p \cdot \frac{x}{p}$, 注意:

$\lim_{x \rightarrow p} \frac{x}{p} = 1$, 即可證出 (a) 題.

至於 (b) 題, 應證明: $\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{1}{x}$, 方法和 (a) 題相似但解題過程較為困難.

【解】 (a) 顯然 $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$. 其次, $\forall p > 0$, 由於

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} f(x) &= \lim_{x \rightarrow p} f\left(p \cdot \frac{x}{p}\right) = \lim_{x \rightarrow p} \left(f(p) + f\left(\frac{x}{p}\right)\right) \\ &= f(p) + \lim_{x \rightarrow p} f\left(\frac{x}{p}\right) \\ &= f(p) + f\left(\lim_{x \rightarrow p} \frac{x}{p}\right), \quad (\because f \text{ 連續於點 } 1) \\ &= f(p) + f(1) = f(p). \end{aligned}$$

f 在點 p 為連續.

(b) $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f\left(x \cdot \frac{t}{x}\right) - f(x)}{x\left(\frac{t}{x} - 1\right)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(x) + f\left(\frac{t}{x}\right) - f(x)}{x\left(\frac{t}{x} - 1\right)} \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow x} \frac{f\left(\frac{t}{x}\right) - f(1)}{\frac{t}{x} - 1} \\
 &= \frac{1}{x} f'(1), \quad (\because t \rightarrow x \Rightarrow \frac{t}{x} \rightarrow 1) \\
 &= \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

♠ (4-9) 設 f 為一可微於點 0 之偶函數，試證： $f'(0) = 0$.

分析 f 可微於點 0 表示 f 於點 0 之左右導數相等，亦即 $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0)$.

【證】 由於 $f(-h) = f(h)$, $\forall h$, 故

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0) + (-f(-h) + f(0))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} \\
 &= f'_+(0) + f'_-(0), \quad (\text{左右導數之定義}) \\
 &= 2f'(0), \quad (\because \text{原設 } f \text{ 可微於點 } 0)
 \end{aligned}$$

是以 $f'(0) = 0$.

註：偶函數 f 有可能只可微於點 0，在其他點皆不為可微，例如：

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{若 } x \text{ 為有理數,} \\ x^4 & \text{若 } x \text{ 為無理數,} \end{cases}$$

♠ (4-10) 舉一例以說明：若 f 在點 p 為右連續，則 f 在點 p 之右導數未必存在。（其中 p 不為 D_f 之孤立點。）

分析 在中學數學課中，已經知道絕對值函數 $|x|$ 在點 0 為連續，但不為可微。這個例子在此不適用，因為絕對值函數 $|x|$ 在點 0 之右導數存在。

又題目中為何加一句「其中 p 不為 D_f 之孤立點」？理由是：若無此但書，我們可舉出反例 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 1$ ，一個正確而無趣的答案。

【解】 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^{1/3}$ ，由於

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{1/3}}{t} = +\infty,$$

故知 f 在點 0 不為右可微，但 f 在點 0 顯然為右連續。

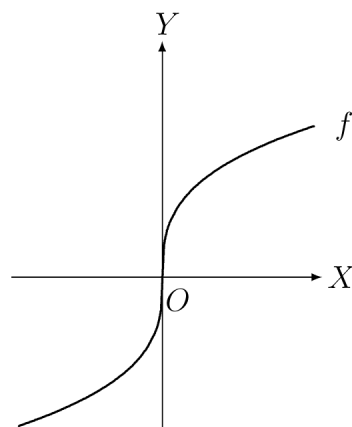


圖 4-2

【解】先求 f 之定義域，

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x^4 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3(1-x) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x(1-x) \geq 0\} = [0, 1]. \end{aligned}$$

1° 先求 f 之導函數.

- $\forall x \in (0, 1), f'(x) = \frac{3x^2 - 4x^3}{2\sqrt{x^3 - x^4}};$
- 在點 $x = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3 - x^4} - 0}{x - 0} = 0;$
- f 在點 $x = 1$ 之差商函數極限為

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - x^4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-x}} = -\infty,$$

故 f 之圖形在點 $(1, 0)$ 有垂直切線為 $x = 1$.

2° 由 1° 知 $f'(p) = 0 \Leftrightarrow p \in \{0, 3/4\}$, 故二水平切線分別為

$$\begin{cases} y = \sqrt{p^3 - p^4}, & \text{其中 } p = 3/4, \\ y = 0, & \text{若 } p = 0, \end{cases}$$

♠ (5-3) 設 S 為由拋物線 $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ 及 X 軸所圍之區域，一電桿豎於 $x = -1.5$ 之上，若欲使電桿上之電燈可照到點 $P(1.5, 0)$ ，試問燈之高度最少為若干？(參見圖 5-2).

分析 第一步先設切點為 (x_0, y_0) ，第二步寫出含 x_0 切線方程式，第三步由已知條件解出 x_0 ，最後由切線解出燈之高度.

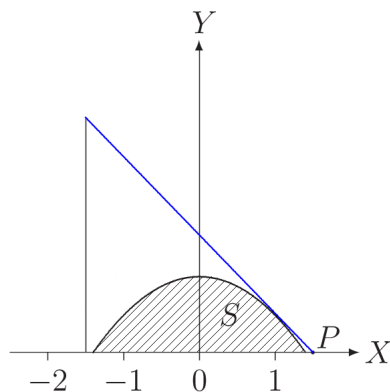


圖 5-2

【解】由於拋物線 $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ 之導數為 $y' = -x$ ，設切點為 (x_0, y_0) ，則切線為

$$y - y_0 = -x_0(x - x_0),$$

因 $y_0 = 1 - \frac{x_0^2}{2}$ ，故切線為

$$y - \left(1 - \frac{x_0^2}{2}\right) = -x_0(x - x_0) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{切線過點 } P(1.5, 0) &\Rightarrow 0 - \left(1 - \frac{x_0^2}{2}\right) = -x_0(1.5 - x_0) \\
 &\Leftrightarrow x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x_0 - 2)(x_0 - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x_0 = 1, \quad (\because x_0 < \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

代回 (1) 式，切線為 $y - \frac{1}{2} = -(x - 1)$ ，當 $x = -1.5$ 時， $y = 3$ ，是以燈之高度最少為 3 單位長度。

♠ (5-4) 一個機車騎士 (motorcyclist) 沿著 $y = x^2$ 的曲線前進，當他騎到點 (a, b) 時，車子的前燈照到一隻鹿在點 $(1, -4)$ ，試求點 (a, b) 。

分析 本題並未說明車子行走方向，由左向右或由右向左，解題時雙向皆應考慮。

【解】 1° 先求 $y = x^2$ 之點 (a, b) 其切線過點 $(1, -4)$ 。

$$\begin{aligned}
 y' = 2x &\Rightarrow \text{切線為 } y - b = 2a(x - a) \\
 &\Rightarrow -4 - b = 2a(1 - a), \quad (\because \text{切線通過點 } (1, -4)) \\
 &\Rightarrow -4 - a^2 = 2a(1 - a), \quad (\because b = a^2) \\
 &\Rightarrow a^2 - 2a - 4 = 0 \\
 &\Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{5} \\
 &\Rightarrow b = a^2 = (1 \pm \sqrt{5})^2
 \end{aligned}$$

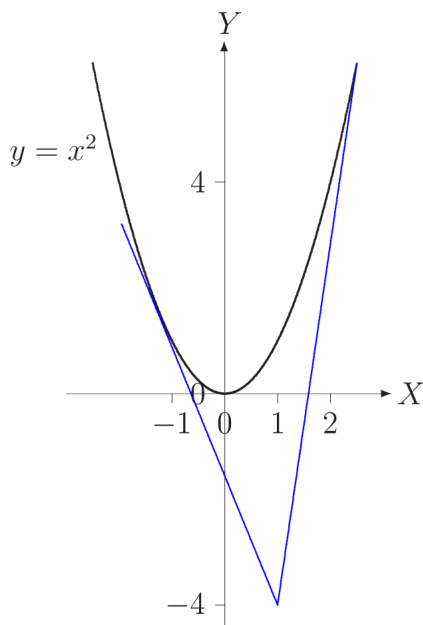


圖 5-3

- 2° 若騎士由左向右行，在點 $(a, b) = (1 - \sqrt{5}, (1 - \sqrt{5})^2)$ 車子的前燈照到點 $(1, -4)$ 之鹿；
- 3° 若騎士由右向左行，在點 $(a, b) = (1 + \sqrt{5}, (1 + \sqrt{5})^2)$ 車子的前燈照到點 $(1, -4)$ 之鹿。

♠ (5-5) 今有梯子斜靠在牆上（參閱右圖），梯長 13 呎，若梯底向外滑開之速度為 2 呎/秒，求梯頂落到距地面 12 呎時，梯頂滑落之速度。

分析 從圖形中我們可明白看出 x 與 y 二變數乃直角三角形之二股，將 y 化爲 x 之函數。

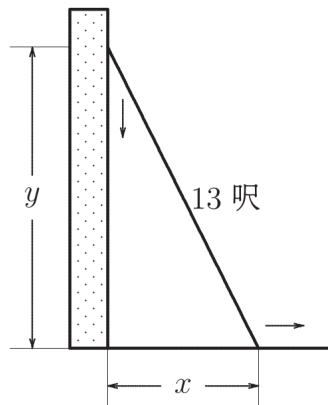


圖 5-4

【解】 設牆腳至梯底之距離為 x 呎，牆腳至梯頂之距離為 y 呎，則應有

$$y = (13^2 - x^2)^{1/2}, \quad (1)$$

上式中，由於 x 為時間 t 之函數，我們可更清楚地將 (1) 式表為

$$y(t) = (13^2 - x^2(t))^{1/2}, \quad (2)$$

如果沒有誤解之可能，通常只使用 (1) 式而不使用 (2) 式。再對時間 t 微分之，則得

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x \frac{dx}{dt}}{2(13^2 - x^2)^{1/2}} = -\frac{x \frac{dx}{dt}}{(13^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (3)$$

當梯頂落至距地面 12 呎時，即 $y = 12$ ，此時 $x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ 。此外，我們已知梯底向外滑行之速度為 $\frac{dx}{dt} = 2$ 呎/秒，代入 (3) 式得梯頂滑落之速度為

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{5 \times 2}{(13^2 - 5^2)^{1/2}} = -\frac{5}{6} \text{ 呎/秒}.$$

(註：負號表示下降之意。)

- ♠ (5-6) 設有一燈泡懸於離地 10 米高之天花板上，一木柱高二米立於距燈泡正下方三米處，若燈泡自天花板上以自由落體速度落地，繼續發光的情形下，試問在 $t = 1$ 秒時，柱影變長的速度為若干？（參見右圖）。

分析 燈落至地面上二米之前，考慮兩個相似三角形，設法找出影長和時間的關係。

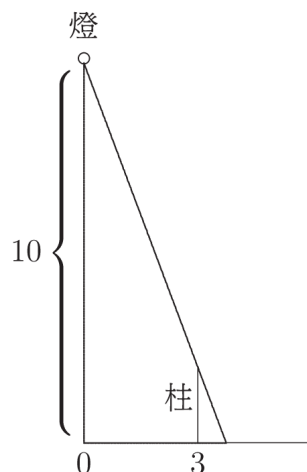


圖 5-5

【解】 設時間 t 時，影長為 $x = f(t)$ ，由相似三角形原理知，

$$\frac{10 - \frac{1}{2}gt^2}{2} = \frac{x + 3}{x}, \quad (\text{其中 } g \text{ 為重力加速度})$$

移項之，得

$$f(t) = x = \frac{12}{16 - gt^2}, \quad t \in [0, 4/\sqrt{g}),$$

是以

$$f'(t) = \frac{24gt}{(16 - gt^2)^2}.$$

當 $t = 1$ 時，柱影變長的速度為

$$f'(1) = \frac{24g}{(16 - g)^2} = 6.119 \text{ (m/sec)}.$$

- ♠ (5-7) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ，邊 AB 每分鐘伸長 3 公分，邊 AC 每分鐘縮減 2 公分，在時間 $t = 0$ 時，設此二邊之長皆為 600 公分，試問：
- 在 $t = 30$ 分時， $\triangle ABC$ 之面積變化率如何？
 - 在 $t = 60$ 分時， $\triangle ABC$ 之面積變化率如何？

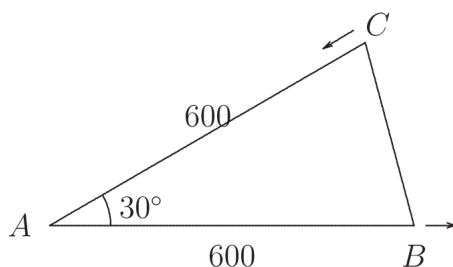


圖 5-6

分析 夾角固定時，三角形面積為二邊之函數，而二邊又是時間之函數，若能將面積化為時間之函數，題目即可解出。

【解】 設面積函數

$$\begin{aligned} f: [0, 300] \rightarrow \mathbb{R} : f(t) &= \text{在時間 } t, \triangle ABC \text{ 之面積} \\ &= (AB \cdot AC \sin 30^\circ)/2 \\ &= \frac{1}{4}(600 + 3t)(600 - 2t). \end{aligned}$$

是以 $\forall t \in [0, 300]$,

$$f'(t) = \frac{1}{4}(3 \cdot (600 - 2t) - 2 \cdot (600 + 3t)).$$

$$(a) \quad f'(30) = \frac{1}{4}(3 \times 540 - 2 \times 690) = 60 \text{ (cm}^2/\text{min)};$$

$$(b) \quad f'(60) = \frac{1}{4}(3 \times 480 - 2 \times 780) = -30 \text{ (cm}^2/\text{min)}.$$

♠ (5-8) 一直徑 8 呎深 10 呎之正圓錐容器（頂點在下），每分鐘注入 5 立方呎之水，試問當水深為 6 呎時，水面上升之速度為何？（參見右圖）。

分析 本題之關鍵有三：

- ① 圓錐體之體積，
- ② 圓錐體之高和底半徑之關係，
- ③ 體積之變率為一常數。

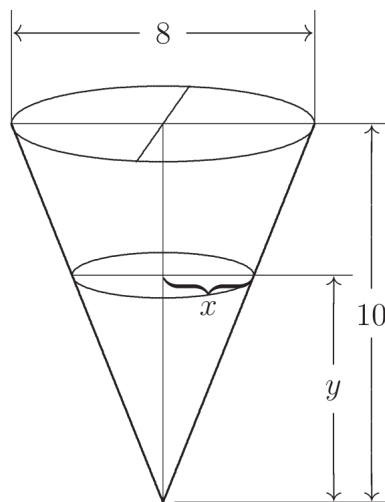


圖 5-7

【解】 設於時間 t 分鐘，水面高度為 y 呎，水面半徑為 x 呎，此時水之總體積為 V 立方呎，由原設知， $\frac{y}{x} = \frac{10}{4}$ ，是以 $x = \frac{2y}{5}$ ，故體積應為

$$V = \frac{\pi x^2 y}{3} = \frac{4\pi y^3}{75},$$

上式左右兩端分別對 t 微分之，得

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi y^2}{25} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

已知進水速度 $\frac{dV}{dt} = 5$ ，水面高度 $y = 6$ ，代入上式得水面上升速度為

$$\frac{dy}{dt} = \frac{25}{4\pi \cdot y^2} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{25}{4\pi \cdot 36} \cdot 5 = \frac{125}{144\pi} \approx 0.2763 \text{ (呎/分)}.$$

♠ (5-9) 有一燈塔，其上之燈每 15 秒旋轉一次，此塔距海岸線最近之點 P 200 呎，試求距點 P 400 呎處燈光沿海岸線移動之速度？

分析 本題有兩個變數，其一為燈之旋轉角度 θ ，另一則為沿岸之受光點和點 P 之距離，設法找到二者之關係。

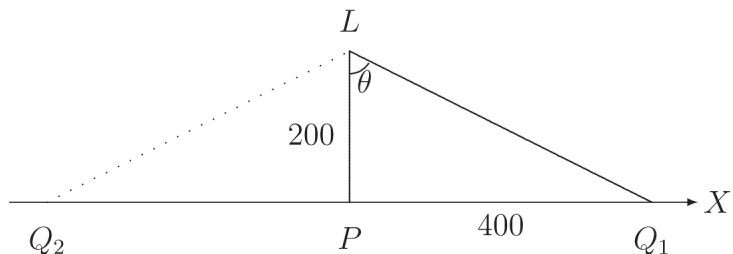


圖 5-8

【解】 設 L 表燈塔， P 表岸上最接近燈塔之點（令之為原點）， Q_1 表岸上被燈所照射之點，（ Q_2 與 Q_1 對稱於 P ，只需討論 Q_1 ），其坐標為 $(x, 0)$ ， $\theta = \angle PLQ_1$ ，應有

$$\frac{x}{200} = \tan \theta,$$

亦即 $x = 200 \tan \theta$ ，對時間 t 微分之，得

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 200 \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{200}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{200}{(1/\sqrt{5})^2} \cdot 4 \cdot 2\pi, \quad (\text{理由見 } (*)) \\ &= 8000\pi \text{ (ft/min)} \quad \left(= \frac{400\pi}{3} \text{ (ft/sec).} \right) \end{aligned}$$

$$(*) \quad \text{當 } PQ_1 = 400 \text{ 時, } \cos \theta = \frac{200}{\sqrt{200^2 + 400^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

【解】法一：利用導數定義，

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a-3h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-3h)}{h} \\
 &= 4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a)}{4h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-3h) - f(a)}{-3h} \\
 &= 4f'(a) + 3f'(a) = 7f'(a) = \frac{7}{1+a^2},
 \end{aligned}$$

故得 $a = \pm\sqrt{6}$.

法二：利用 l'Hospital 規則，

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a-3h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4f'(a+4h) + 3f'(a-3h)}{1} = 7f'(a) = \frac{7}{1+a^2},
 \end{aligned}$$

故得 $a = \pm\sqrt{6}$.

♠ (6-3) 試求函數 $f(x) = \ln(\sin^{-1} \sqrt{x})$ 之導函數。

【分析】微分某函數大半不會太困難，不過許多人都忘了交待在何處可微，在何處不可微，因此，第一步需先求函數之定義域。

【解】 f 之定義域為

$$\begin{aligned}
 D_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid \ln(\sin^{-1} \sqrt{x}) \text{ 有意義} \} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin^{-1} \sqrt{x} \text{ 有意義且 } > 0 \} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \in (0, 1] \} = (0, 1].
 \end{aligned}$$

■ $\forall x \in (0, 1)$,

$$Df(x) = \frac{1}{\sin^{-1} \sqrt{x}} \cdot \frac{D\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)} \sin^{-1} \sqrt{x}}.$$

■ 至於 $x = 1$ 時，因為

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} Df(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)} \sin^{-1} \sqrt{x}} = +\infty.$$

由導數之極限定理[†]知 f 在點 1 不為可微分。故 f 之導函數為

$$f': (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)} \sin^{-1} \sqrt{x}}.$$

[†] 見拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第二章 § 2.5. 定理 2.17.

♠ (6-4) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = a \cdot e^x - b \cdot e^{-x}$, 其中 a 與 b 均為大於零的常數.

- (a) 試證: f 為對射 (bijective), [註: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$ 視為已知.]
 (b) 試求 f^{-1} 及其導函數.

分析 本題之 f 與雙曲函數 $\sinh$ 相似, 解題過程亦相似. 證明 f 為蓋射時, 需利用:

- ① 若定義域為一區間, 而函數為連續, 則其值域必為一區間;
 ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 說明值域無上界;
 ③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 說明值域無下界.

【解】(a) 首先 f 為嵌射, 因為

$$f'(x) = ae^x + be^{-x} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ 為遞增}.$$

其次, f 為蓋射, 因為

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ 為連續} \\ D_f = \mathbb{R} \text{ 為一區間} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

(b) 令 $y = ae^x - be^{-x}$, 由於

$$\begin{aligned} y = ae^x - be^{-x} &\Leftrightarrow ae^{2x} - ye^x - b = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4ab}}{2a}, \quad (\text{負不合, 因 } y - \sqrt{y^2 + 4ab} < 0) \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4ab}}{2a}\right). \end{aligned}$$

$\therefore f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4ab}}{2a}\right)$, 是以

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 4ab}} \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2 + 4ab}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4ab}}.$$

故 f^{-1} 之導函數為

$$(f^{-1})': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4ab}}.$$

♠ (6-5) 設 $f(x) = e^x \sin x$, 試證: $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$, 內 $n \in \mathbb{N}$.

分析 證明一含自然數 n 之恆等式, 通常使用數學歸納法.

【證】 利用數學歸納法, 我們欲證: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right). \quad (*)$$

當 $n = 1$ 時,

$$\begin{aligned} (*) \text{之左} &= f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = (*) \text{之右}. \end{aligned}$$

設 $n = k$ 時, $(*)$ 式為真, 即

$$f^{(k)}(x) = (\sqrt{2})^k e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right),$$

往證: $n = k + 1$ 時, $(*)$ 式亦為真;

$$\begin{aligned} (*) \text{之左} &= f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' \\ &= (\sqrt{2})^k \left(e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) + e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \right) \\ &= (\sqrt{2})^k e^x \cdot \sqrt{2} \left(\sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= (\sqrt{2})^{k+1} e^x \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4}\right) = (*) \text{之右}. \end{aligned}$$

♠ (6-6) 設函數 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} x^x, & \text{若 } x > 0, \\ 1, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$

- (a) 試問 f 在點 0 是否為連續?
- (b) 試問 f 在點 0 是否為可微?
- (c) 試問 f 於何處有極值? 相對極值或絕對極值?

分析 解決含 x^x 之問題, 首先需利用定義 $x^x = \exp(x \ln x)$. 在點 0 是否可微必須利用定義討論之.

【解】 (a) 由於

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x \ln x) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}\right), \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\ &= 1 = f(0), \end{aligned}$$

知 f 在點 0 為連續.

(b) 因

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x(\ln x + 1)}{1} = -\infty,$$

知 f 在點 0 爲不爲可微.(c) 先求 f 之臨界點集, 因

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^x(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1},$$

知臨界點集爲 $\{0, e^{-1}\}$, 其次, 由於

x	0	e^{-1}
$f'(x)$		- 0 +
說明	max	↘ min ↗

故知 f 於點 e^{-1} 有最小值 $(e^{-1})^{e^{-1}} = \frac{1}{e^{1/e}}$, 而於點 0 有相對極大值 1.(註: f 無最大值, 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.)

♠ (6-7) 設函數 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. 試求 f 之值域及其最小上界、最大下界.

分析 求某函數之值域往往是件麻煩事, 但若能證明此函數爲單調(monotone), 題目已解開一大半, 第一步當然是先求 f 之導數, 我們需要使用公式 $a^b = \exp(b \ln a)$, (其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}$).

【解】 由於 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$.

1° f 之導數

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot x\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) > 0, \forall x > 0, \quad (\text{理由見}(*)) \end{aligned}$$

故知 f 爲遞增.

(*) 考慮 $\ln$ 於區間 $[x, x+1]$, 內 $x > 0$, 由均值定理知, 存在 $c \in (x, x+1)$ 使得

$$\frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x} = \ln' c = \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1},$$

$$\text{故 } \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}.$$

2° 其次,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{1/x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\right), \quad (\text{令 } t = 1/x) \\ &= \exp\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+t}\right), \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\ &= \exp(0) = 1.\end{aligned}$$

3° 仿上法, 可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

綜合以上三點知, f 之值域為 $(1, e)$, 是以 $\sup R_f = e$, $\inf R_f = 1$.

♠ (6-8) 設 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$ 試求 $f'(0)$ 及 $f''(0)$.

分析 求 f 在點 0 之一、二階導數都必須使用定義去解. 又本例在討論解析函數 (analytic function) 是個重要反例.

【解】 若 $x \neq 0$, 則 $f'(x) = D(\exp(-1/x^2)) = 2x^{-3} \exp(-1/x^2)$. 又

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(-1/x^2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{\exp(1/x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/x^2}{[\exp(1/x^2)](-2/x^3)}, \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \exp(1/x^2)} = 0.\end{aligned}$$

故得

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{-3} \exp(-1/x^2), & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

其次,

$$\begin{aligned}f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{-3} \exp(-1/x^2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/x^4}{\exp(1/x^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^2}{\exp(t)}, \quad (\text{令 } t = 1/x^2) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{\exp(t)}, \quad (\text{二次 l'Hospital 規則}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

♠ (6-9) 設點 P 為 $\tan^{-1}$ 與 $\cot^{-1}$ 二函數之交點，試求二曲線過點 P 之切線的夾角 θ ($\in [0^\circ, 90^\circ]$).

分析 我們知道，若能找到交點之坐標，題目差不多就已解決，其實「 $\tan^{-1}$ 與 $\cot^{-1}$ 之交點」和「 $\tan$ 與 $\cot$ 二函數最接近原點之交點」對稱於直線 $y = x$.

【解】 1° 先求交點 (x_0, y_0) : 令 $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $J = (0, \pi)$,

$$\begin{aligned} y_0 &= \tan^{-1}(x_0) \ \& \ y_0 = \cot^{-1}(x_0) \\ \Rightarrow x_0 &= \tan |_I(y_0) \ \& \ x_0 = \cot |_J(y_0) \\ \Rightarrow \tan |_I(y_0) &= \cot |_J(y_0) \\ \Rightarrow \tan(y_0) &= \cot(y_0), \quad y_0 \in I \cap J = (0, \pi/2) \\ \Rightarrow \sin^2 y_0 &= \cos^2 y_0, \quad y_0 \in (0, \pi/2) \\ \Rightarrow \cos(2y_0) &= 0, \quad y_0 \in (0, \pi/2) \\ \Rightarrow 2y_0 &= \pi/2 \\ \Rightarrow y_0 &= \pi/4 \\ \Rightarrow x_0 &= 1. \end{aligned}$$

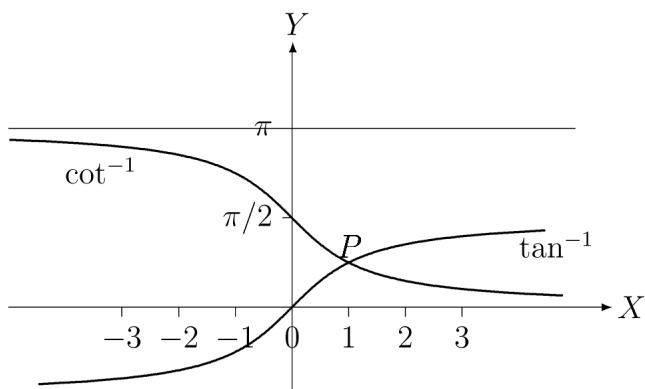


圖 6-1

2° 次求過該點之二切線之斜率，

$$\begin{aligned} m_1 &= D \tan^{-1} 1 = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}, \\ m_2 &= D \cot^{-1} 1 = \frac{-1}{1+1^2} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

3° 最後求二線之交角 θ ，因

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

是以夾角為 $\theta = \tan^{-1} \frac{4}{3} \approx 0.9273 = 53.13^\circ$.

- ♠ (6-10) 設甲銀行以 2% 之年利率每月計息，乙銀行欲以 r 之年利率連續計息且使一年到期之本利和與甲銀行相同，試問 $r = ?$

分析 連續計息乃指數函數之應用，公式為 $A = P e^{nr}$ ，其中 P 為本金， A 為本利和， r 為年利率， n 為年數。有關「連續複利」在拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第三章 §3.8 有較詳細的討論。

【解】 由於一年後，

$$\text{甲銀行之本利和爲 } A_1 = P \left(1 + \frac{0.02}{12} \right)^{12},$$

$$\text{乙銀行之本利和爲 } A_2 = P \cdot e^r.$$

故

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{0.02}{12} \right)^{12} = e^r \\ &\Leftrightarrow r = 12 \ln \left(1 + \frac{0.02}{12} \right) = 0.0199834. \end{aligned}$$

§ 7 均值定理

「微分均值定理」簡稱均值定理，（另外還有個「積分均值定理」），它是個簡單而實用的定理，讀者肯定耳熟能詳，它衍生出三個「系」，讀者若有興趣，不妨參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》§ 2.5. p.78 ~ 80.

♠ (7-1) 試證： $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$

分析 證明 $\frac{\sin x}{x} < 1$ 是容易的，證明 $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x}$ 則比較困難，如果找對方法，證明其實滿簡單的。

【證】1° 爲方便以下的討論，我們先證明： $\forall x \in (0, \pi/2), \tan x > x$.

因爲 $\tan$ 在區間 $[0, x]$ 滿足均值定理之條件，故存在 c 介於 0 與 x 之間（當然 $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ ），滿足

$$\tan x - \tan 0 = (\tan' c)(x - 0) = (\sec^2 c) \cdot x > x.$$

亦即 $\tan x > x$.

2° 其次，令

$$g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 1, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

則 g 爲連續且, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0, \quad (\because 1^\circ)$$

知 g 為遞減函數. 是以 $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$g(0) = 1 > g(x) > g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}.$$

亦即函數 g 在點 0 有絕對極大，而於點 $\frac{\pi}{2}$ 有絕對極小。

♠ (7-2) 試利用均值定理證明：若 $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$, $y < x$, 則 $\sin x - \sin y < x - y$.
(注意：證明 $<$, 而不是 $\leq$).

分析 證明「 $\sin x - \sin y \leq x - y$ 」是簡單的，但要證明二者不相等則較費心，應分 $0 \leq y < x$ ， $y < x \leq 0$ ， $y < 0 < x$ 三種情況討論。

【證】 ■ 若 $0 \leq y < x \leq \pi/2$ ，由均值定理知存在 $c \in (y, x)$ 使得

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \sin' c = \cos c \in (0, 1).$$

故 $\sin x - \sin y < x - y$.

- 若 $-\pi/2 \leq y < x \leq 0$ ，仿上讀者自證之。
- 若 $-\pi/2 \leq y < 0 < x \leq \pi/2$ ，應有

$$\sin x < x \quad \text{①}$$

$$\sin(-y) < (-y) \quad \text{②}$$

二式相加，即得 $\sin x - \sin y < x - y$.

♠ (7-3) 解方程式 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$.

分析 此方程式對等於 $x^2 = 2^x$ ，我們可以很容易的看出來：此方程式有 2 及 4 兩個根，但要證明沒有有其他根並不十分容易，方法不唯一。

【解】顯然此方程式有 2 及 4 兩個根。次設

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln 2}{2},$$

$$\text{則 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad \forall x > 0,$$

法一：因

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e, \quad (\star)$$

假定方程式 $f(x) = 0$ 有三相異實根 $r_1 < r_2 < r_3$ ，則由 Rolle 定理知存在 a, b 滿足

$$r_1 < a < r_2 < b < r_3 \text{ 且 } f'(a) = f'(b) = 0,$$

顯然與 $(\star)$ 相矛盾，因為 $(\star)$ 式證明 $f'(x) = 0$ 只有一根。

法二：由於

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0, & \text{若 } 0 < x < e, \\ = 0, & \text{若 } x = e, \\ < 0, & \text{若 } x > e. \end{cases}$$

知 f 在區間 $(0, e]$ 為遞增，而於區間 $[e, +\infty)$ 為遞減，故除 2 與 4 不可能有其他根。

♠ (7-4) 試利用均值定理證明： $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1, \forall x > 0$.

分析 必須分爲 $x = 1$, $x > 1$ 及 $x < 1$ 三種情況討論.

【證】1° 若 $x = 1$, 不等式之三者皆爲 0, 不等式顯然成立.

2° 若 $x > 1$, 考慮自然對數函數 $\ln$ 在區間 $[1, x]$ 上, 因爲 $\ln$ 滿足均值定理之條件, 故存在 $p \in (1, x)$, 使得

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln' p = \frac{1}{p}.$$

亦即

$$\ln x = \frac{x-1}{p}. \quad (*)$$

故

$$\begin{aligned} 1 < p < x &\Rightarrow 1 > \frac{1}{p} > \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow x-1 > \frac{x-1}{p} > \frac{x-1}{x} \\ &\Rightarrow x-1 > \ln x > \frac{x-1}{x}, \quad (\because (*)). \end{aligned}$$

3° 若 $0 < x < 1$, 考慮 $\ln$ 在區間 $[x, 1]$ 上, 同理, 存在 $p \in (x, 1)$, 使得

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln' p = \frac{1}{p}. \quad (**)$$

故

$$\begin{aligned} 0 < x < p < 1 &\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{p} > 1 \\ &\Rightarrow \frac{x-1}{x} < \frac{x-1}{p} < x-1, \quad (\because x-1 < 0) \\ &\Rightarrow \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1, \quad (\because (**)). \end{aligned}$$

♠ (7-5) 試利用不等式： $\ln x \leq x-1, \forall x > 0$, 證明**算幾不等式** (arithmetic-geometric-mean inequality), (n 個正數之幾何平均恆小於或等於其算術平均), 即

$$\forall x_1, \dots, x_n > 0, \quad (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

分析 上題業已證明不等式 $\ln x \leq x-1, \forall x > 0$. 除了使用對數不等式證明之外, 尚有其他方法, 有興趣讀者不妨在網路上尋找.

【證】法一：令算術平均為 $M = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ ，則

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_j}{M} &\leq \frac{x_j}{M} - 1, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n \ln \frac{x_j}{M} \leq \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{M} - n = 0 \\ &\Rightarrow \ln \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j}{M} \right) \leq 0 \\ &\Rightarrow \prod_{j=1}^n \frac{x_j}{M} \leq 1 \\ &\Rightarrow \prod_{j=1}^n x_j \leq M^n \\ &\Rightarrow (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq M. \end{aligned}$$

法二：令幾何平均為 $G = (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$ ，則

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_j}{G} &\leq \frac{x_j}{G} - 1, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n \ln \frac{x_j}{G} \leq \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{G} - n \\ &\Rightarrow \ln 1 = \ln \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j}{G} \right) \leq \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{G} - n \\ &\Rightarrow n \leq \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{G} \\ &\Rightarrow G \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j. \end{aligned}$$

♠ (7-6) 試證： $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ， $\forall x \in [-1, 1]$ 。

【分析】本題看似簡單，如果對於反三角函數之定義不十分清楚者，會弄得一片混亂。

【證】法一：令 $y = \sin^{-1} x$ ， $I = [-\pi/2, \pi/2]$ ， $J = [0, \pi]$ 。

$$\begin{aligned} y = \sin^{-1} x &\Rightarrow \begin{cases} y \in I = [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - y \in J = [0, \pi], \\ x = \sin y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \cos |_J \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \end{cases} \\ &\Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y, \quad (\text{注意上式中的 } J) \\ &\Rightarrow y + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

註：以下證明有何錯誤？

$$\lceil y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - y\right) \Rightarrow y + \cos^{-1} x = \frac{5\pi}{2}. \rceil$$

法二：設 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ ，則 $\forall x \in (-1, 1)$ ，

$$\begin{aligned} f'(x) &= D \sin^{-1} x + D \cos^{-1} x \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \end{aligned}$$

又 f 為連續函數，由零導數定理知，存在常數 C 使得

$$f(x) = C, \quad \forall x \in [-1, 1],$$

但 $f(0) = \sin^{-1} 0 + \cos^{-1} 0 = 0 + \frac{\pi}{2}$ ，結論：

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

♠ (7-7) 若函數 f 滿足 $f'(x) = \frac{1}{5 + \sin x}$ ， $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $f(0) = 0$ ，利用均值定理證明：

$$\frac{\pi}{12} < f\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{10}.$$

分析 儘管我們可以由 $f'(x) = \frac{1}{5 + \sin x}$ 利用不定積分求出 f ，但本題規定必須利用「均值定理」，由題意不妨考慮 f 在區間 $[0, \pi/2]$ 。

【證】 考慮 f 在區間 $[0, \pi/2]$ ，因其為可微，故可利用均值定理，存在 $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得

$$\frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = f'(c),$$

$$\text{即 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot f'(c).$$

$$\begin{aligned} 0 < c < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow 0 < \sin c < 1 \\ &\Rightarrow 5 < 5 + \sin c < 6 \\ &\Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{5 + \sin c} > \frac{1}{6} \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{5} > \frac{\pi}{2} \cdot f'(c) > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{12} < f\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

♠ (7-8) 試求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = ?$

分析 本題利用極限定義或定理，包括 l'Hospital 規則，都不易解出，而需要使用均值定理。

【解】 令 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sin \sqrt{x}$ ，則 $f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ 。由於 f 在區間 $[x, x+1]$ 上滿足均值定理之前提，故存在 $c_x \in (x, x+1)$ 使得

$$\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = \frac{\cos \sqrt{c_x}}{2\sqrt{c_x}}.$$

當 $x \rightarrow +\infty$ 時，顯然 $c_x \rightarrow +\infty$ ，而 $\cos \sqrt{c_x}$ 為有界，是以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{c_x}}{2\sqrt{c_x}} = 0.$$

♠ (7-9) 試證：方程式 $x^2 = x \sin x + \cos x$ 恰有二實根。

分析 若令 $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$ ，設法證明：① $f(x) = 0$ 至少有二實根，② $f(x) = 0$ 至多有二實根。前者利用 $f(0) = -1$ 及 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ ，後者則利用導數正負以判定 f 在區間 $[0, +\infty)$ 及 $(-\infty, 0]$ 分別為遞增及遞減。

【證】 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$ ，則

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \sin x - x \cos x + \sin x \\ &= x(2 - \cos x) \begin{cases} > 0, & \text{若 } x > 0, \\ = 0, & \text{若 } x = 0, \\ < 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1° 由上式知 f 於 $[0, +\infty)$ 上為遞增，且因 $f(0) = -1$ ，

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right) = +\infty,$$

故知方程式 $f(x) = 0$ 於區間 $[0, +\infty)$ 上僅有一實根， $r_1 > 0$ 。

2° 同理， f 於區間 $(-\infty, 0]$ 上為遞減，且因 $f(0) = -1$ ，

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right) = +\infty,$$

故知方程式 $f(x) = 0$ 於區間 $(-\infty, 0]$ 上僅有一實根， $r_2 < 0$ 。

故知 f 於點 p 為不可微分。

由以上討論知 f 之臨界點集為 $Z_{f'} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f = \{-2, -2^{1/3}, 0, 2\}$ 。我們利用繪表方法討論 f 之極值。

x	-2	$-2^{1/3}$	0	2	
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$+$	
説明	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$ max

又 $f(-2) = 6$, $f(-2^{1/3}) = 0$, $f(2) = 10$, 故知 f 在點 2 有最大值, 在點 -2 有相對極大, 而在點 $-2^{1/3}$ 有最小值。 f 之圖形如下:

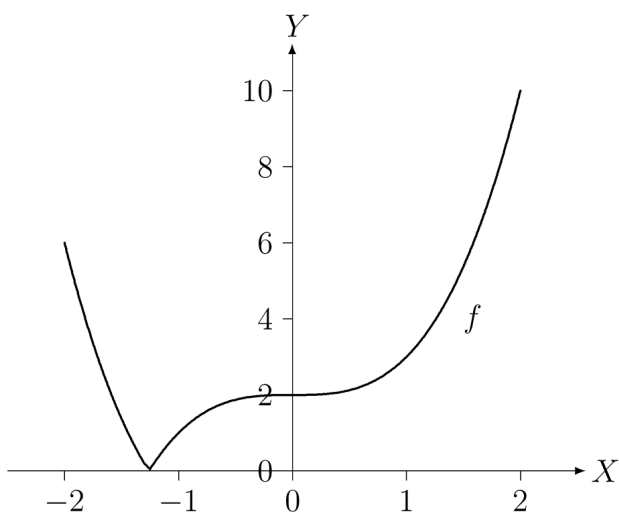


圖 8-1 (註: 兩軸單位不同)

♥ (8-2) 設 $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, 試求其臨界點且將各極值予以分類。

分析 函數一旦含有絕對值符號, 處理時需特別小心, 注意不可微分之點。

【解】 由於

$$f: [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & \text{若 } x < 0, \\ x^2 - 2x + 2, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

則

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{若 } x < 0, \\ \text{不存在}, & \text{若 } x = 0, \\ 2x - 2, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$$

顯然

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad (\text{註: } x = -1 \text{ 不在定義域內.})$$

故臨界點集為 $\{-1/2, 0, 1, 3/2\}$.

x	$-1/2$		0	1		$3/2$	
$f'(x)$	+			-	0	+	
說 明	min	↗	max	↘	min	↗	max

又因 $f(0) = 2$, $f(3/2) = 1.25$, $f(-1/2) = 1.25$, $f(1) = 1$, 知 f 於點 0 有最大, 於點 1 有最小, 於點 $-1/2$ 有相對極小, 於點 $3/2$ 有相對極大.

♠ (8-3) 一條寬為 a 之矩形紙張 (長度可視為無限), 將其左下角向上摺疊, 使其恰好觸及頂邊 (如圖).

- (a) 試求 x 以使 $\triangle AEF$ 之面積為最大;
 (b) 試求 x 以使 $\triangle EFG$ 之面積為最小.

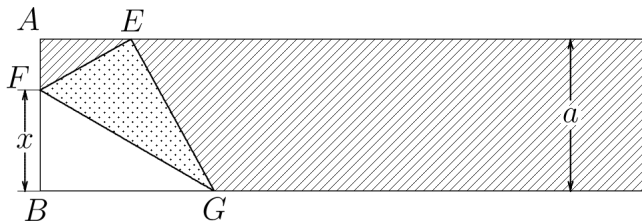


圖 8-2

分析 將指定之三角形表為 x 之函數, 其中 (a) 題較 (b) 題為容易; 函數一旦找到, 題目即可迎刃而解.

【解】 (a) 由於 $AF = a - x$, $FE = x$, 故 $AE = \sqrt{x^2 - (a - x)^2} = \sqrt{2ax - a^2}$, 因此 $\triangle AEF$ 之面積 (函數) 為

$$f: \left(\frac{a}{2}, a\right) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}(a - x)\sqrt{2ax - a^2}.$$

因

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{2ax - a^2} + \frac{1}{2}(a - x)\frac{a}{\sqrt{2ax - a^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2ax - a^2 - a(a - x)}{\sqrt{2ax - a^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2 - 3ax}{\sqrt{2ax - a^2}} \begin{cases} > 0, & \text{若 } x < \frac{2a}{3}, \\ = 0, & \text{若 } x = \frac{2a}{3}, \\ < 0, & \text{若 } x > \frac{2a}{3}, \end{cases}$$

知 f 在點 $x = \frac{2a}{3}$ 有最大值.

(b) 過點 G 做一補助線垂直於底線並交頂邊於點 C ，顯然 $\triangle AEF \sim \triangle ECG$ ，故應有

$$\begin{aligned}\frac{EF}{AE} &= \frac{EG}{CG} \Rightarrow EG = \frac{CG \cdot EF}{AE} = \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}} \\ \Rightarrow \triangle EFG \text{ 之面積} &= \frac{1}{2} \cdot EF \cdot EG = \frac{ax^2}{2\sqrt{2ax - x^2}}.\end{aligned}$$

爲方便計，將上述面積平方之，而求其極值點，令

$$g: \left(\frac{a}{2}, a\right) \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = \frac{a^2 x^4}{4(2ax - a^2)}.$$

因

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{4a^2 x^3(2ax - a^2) - a^2 x^4 \cdot 2a}{4(2ax - a^2)^2} \\ &= 2x^3 a^3 \cdot \frac{3x - 2a}{4(2ax - a^2)^2} \begin{cases} < 0, & \text{若 } x < \frac{2a}{3}, \\ = 0, & \text{若 } x = \frac{2a}{3}, \\ > 0, & \text{若 } x > \frac{2a}{3}, \end{cases}\end{aligned}$$

知 g 在點 $\frac{2a}{3}$ 有最小值，亦即當 $x = \frac{2a}{3}$ 時， $\triangle EFG$ 之面積爲最小。

另法：先求點 G 之坐標，令點 B 爲原點，暫時令 $FB = x_0$ ，則因 $\overleftrightarrow{FE} \perp \overleftrightarrow{EG}$ ，利用過點 E 之點斜式，知 $\overleftrightarrow{EG}$ 之方程式爲

$$y - a = \frac{-\sqrt{2ax_0 - a^2}}{a - x_0} (x - \sqrt{2ax_0 - a^2}),$$

再令 $y = 0$ ，則得點 G 之 x 坐標爲

$$x = \sqrt{2ax_0 - a^2} + \frac{a(a - x_0)}{\sqrt{2ax_0 - a^2}} = \frac{ax_0}{\sqrt{2ax_0 - a^2}},$$

$\triangle EFG$ 之面積 (等於 $\triangle FBG$ 之面積) 爲

$$\frac{x_0}{2} \cdot \frac{ax_0}{\sqrt{2ax_0 - a^2}}.$$

其餘如上。

♥ (8-4) 設 $a, b > 0$ 且 $a + b = 1$.

(a) 試證： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ ；

(b) 試求 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2$ 之最小值。

分析 (a) 題並不困難，但 (b) 題則不太容易，使用微分方法十分麻煩，使用幾何方法相對簡單許多，但能想到這種方法則需運氣。

【解】(a) 令

$$f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}: f(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a(1-a)},$$

則

$$f'(a) = \frac{2a-1}{a^2(1-a)^2} = \begin{cases} < 0, & \text{若 } a < 1/2, \\ = 0, & \text{若 } a = 1/2, \\ > 0, & \text{若 } a > 1/2, \end{cases}$$

知 f 在點 $1/2$ 有最小值，即 $f(a) \geq f(1/2) = 4, \forall a \in (0, 1)$.

(b) 令

$$T = \left\{ \left(a + \frac{1}{a}, b + \frac{1}{b} \right) \mid a, b > 0 \text{ 且 } a + b = 1 \right\},$$

$$\left[\text{註：} T \text{ 內任一點至原點之距離為 } \sqrt{\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2} \right],$$

$$S = \{(x, y) \mid x, y > 0 \text{ \& } x + y \geq 5\} \text{ (圖內網點部分).}$$

則

1° $T \subset S$ ，因若 $a, b > 0$ 且 $a + b = 1$ ，應有

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} = a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1 + 4 = 5.$$

2° 令 $P = \left(\frac{1}{2} + 2, \frac{1}{2} + 2 \right)$ ， O 為原點，應有 $P \in T$ ，且 $OP = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

3° 由於

$$\text{dist}(OT) \geq \text{dist}(OS) = OP = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{亦即 } \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \text{ 之最小值為 } \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}.$$

(註： $\text{dist}(OT)$ 表點 O 與集合 T 之最短距離.)

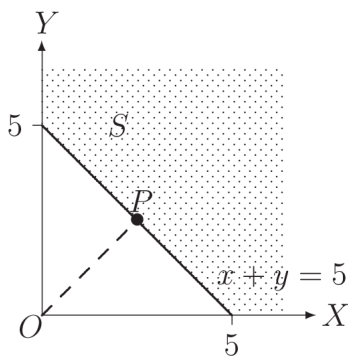


圖 8-3

- ♠ (8-5) 以邊長為 a 之一正方形紙板，在其四個角上適當的剪去兩個小正方形與兩個小長方形，使可摺成一有蓋的長方體（如下圖所示），試問應如何剪法方可使長方體之體積為最大？

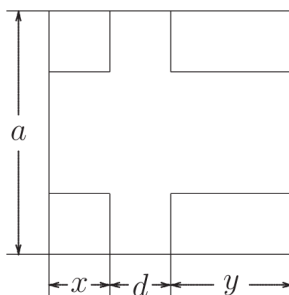


圖 8-4

分析 長方體的長、寬和高皆與 x 有關，若能將體積表為 x 之函數，題目已解決大半。

【解】 設長方體的長、寬和高分別為 $a - 2x$, d , x ，欲圍成一有蓋之盒子，須滿足

$$y = x + d = \frac{a}{2},$$

故 $d = \frac{a}{2} - x$ ，令此長方體體積為 x 之函數，即

$$V: \left(0, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} : V(x) = x(a - 2x)\left(\frac{a}{2} - x\right) = 2x^3 - 2ax^2 + \frac{a^2}{2}x.$$

茲求 V 之最大值。由於

$$V'(x) = 6x^2 - 4ax + \frac{a^2}{2} = 6\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{6}\right),$$

故 $\frac{a}{6}$ 為唯一臨界點。其次，由以下之表

x	0	$a/6$	$a/2$
$f'(x)$	+	0	-
說明	$\nearrow$	max	$\searrow$

知 V 在 $\frac{a}{6}$ 有絕對極大，此時體積 $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a^3}{27}$ 。

- ♠ (8-6) 有一梯形屋簷排水槽（如下圖）由一寬為 12 吋之長鐵皮所摺成，其每邊長都是 4 吋，試求 θ 為何值時，有最大排水量。

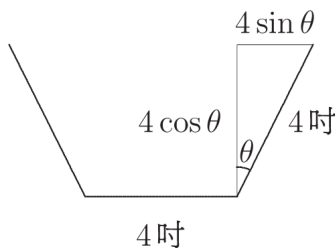


圖 8-5

分析 顯然排水槽之截面積最大時有最大排水量，將截面積表為 θ 之函數即可解出。

【解】 排水槽之截面積 A 為最大時，有最大排水量。為此，設

$$\begin{aligned} A: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}: A(\theta) &= 4 \cdot 4 \cos \theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \sin \theta \cdot 4 \cos \theta \\ &= 16(\cos \theta + \sin \theta \cos \theta). \end{aligned}$$

其導數為

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0, \pi/2], \quad A'(\theta) &= 16(-\sin \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= -16(\sin \theta + \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta)) \\ &= -16(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 1), \end{aligned}$$

令 $A'(\theta) = 0$ ，即

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) = 0,$$

得 $\theta = \pi/6$ ，（註： $\theta \in [0, \pi/2]$ ， $\sin \theta + 1 > 0$ 。）

1° $x \in [0, \pi/6)$ ， $A'(\theta) > 0$ ，即 A 在區間 $[0, \pi/6]$ 為遞增。

2° $x \in (\pi/6, \pi/2]$ ， $A'(\theta) < 0$ ，即 A 在區間 $[\pi/6, \pi/2]$ 為遞減。

是以，當 $\theta = \pi/6$ 時， A 有絕對極大值。

♠ (8-7) 設 $P(0, p)$ ， $Q(0, q)$ 為 Y 軸上二固定點，內 $0 < p < q$ 。
試求 X 軸上之點 $R(r, 0)$ ， $r > 0$ ，以使 $\angle QRP$ 為最大。

分析 設 $\theta = \angle QRP$ ，但第一步先將 $\tan \theta$ 化為 r 之函數，第二步求 $\tan \theta$ 之極大值，最後利用 $\tan^{-1}$ 遞增性而得點 R 之位置，以使 θ 為最大。

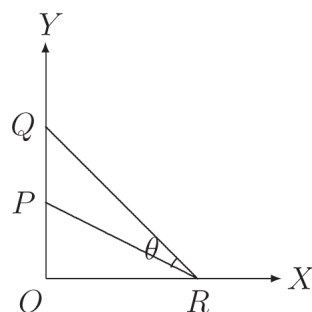


圖 8-6

【解】設 O 為原點， $\angle QRP = \theta$ ， $\angle ORQ = \alpha$ ， $\angle ORP = \beta$ ，應有 $\theta = \alpha - \beta$ 。

1° 先將 $\tan \theta$ 化為 r 之函數：

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \\&= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\&= \frac{\frac{q}{r^2 + q^2} \cdot \frac{r}{r^2 + p^2} - \frac{r}{r^2 + q^2} \cdot \frac{p}{r^2 + p^2}}{\frac{r}{r^2 + q^2} \cdot \frac{r}{r^2 + p^2} + \frac{q}{r^2 + q^2} \cdot \frac{p}{r^2 + p^2}} \\&= \frac{qr - rp}{r^2 + pq}.\end{aligned}$$

2° 其次求 r 之值以使 $\tan \theta$ 有最大值。

令 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: f(r) = \frac{qr - rp}{r^2 + pq}$ ，則

$$\begin{aligned}f'(r) &= \frac{(q-p)(r^2 + pq) - 2r(qr - rp)}{(r^2 + pq)^2} = \frac{(q-p)(pq - r^2)}{(r^2 + pq)^2} \\&\begin{cases} > 0, & \text{若 } r < \sqrt{pq}, \\ = 0, & \text{若 } r = \sqrt{pq}, \\ > 0, & \text{若 } r > \sqrt{pq}. \end{cases}\end{aligned}$$

故知當 $r = \sqrt{pq}$ 時， $\tan \theta$ 有最大值。

3° $\tan^{-1}$ 為遞增，是以當 $r = \sqrt{pq}$ 時， θ 有最大值。

♠ (8-8) 舉一例： $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在點 a 既無相對極大值亦無相對極小值。

分析 這是個觀念性問題，有不少人認為任何函數，若其定義域為一有界閉區間，則在二端點必有相對極大或相對極小，這是錯誤的，不過舉反例並不容易，需要具有「震盪」性質的特殊函數來建構。

【解】反例之一如下：

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

則 f 在點 0 既無極大值亦無極小值，圖形如下：

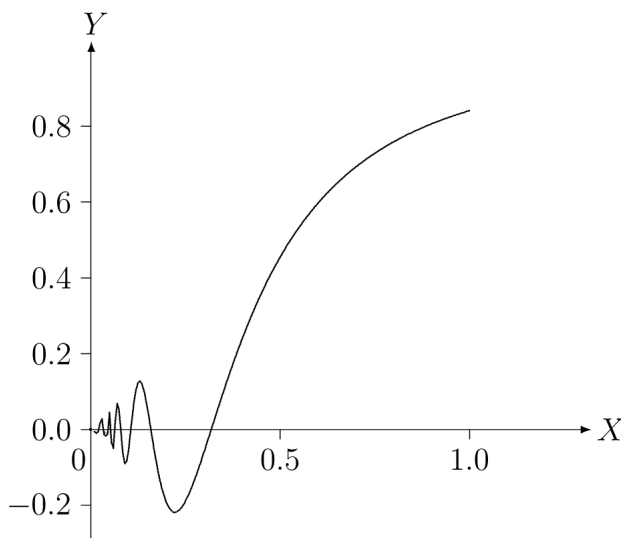


圖 8-7

♠ (8-9) 試求曲線 $f(x) = \frac{1}{1 + 5 \cdot e^{-x}}$ 之切線的最大斜率。並求斜率之最大下界。

分析 這類函數稱為 logistic growth function (or logistic function)，有學者將它用來研究人口成長，(參見下圖)，起初成長十分緩慢，後來成長速度加快，但到了後期成長又緩慢下來。本題之解法係以 $f'(x)$ 之導數 $f''(x)$ 以求 $f'(x)$ 之最大值。

【解】 1° 由於

$$f(x) = \frac{1}{1 + 5e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 5},$$

$$f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 5)^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{5e^x(e^x + 5)^2 - 10(e^x + 5)e^{2x}}{(e^x + 5)^4} = \frac{5e^x(e^x + 5 - 2e^x)}{(e^x + 5)^3} \\ &= \frac{5e^x(-e^x + 5)}{(e^x + 5)^3} \begin{cases} > 0, & \text{若 } x < \ln 5, \\ = 0, & \text{若 } x = \ln 5, \\ < 0, & \text{若 } x > \ln 5, \end{cases} \end{aligned}$$

故知當 $x = \ln 5$ 時，曲線有最大之斜率 $\frac{5^2}{(5 + 5)^2} = \frac{1}{4}$ 。

2° 由 $f''(x)$ 知， f 之斜率 (即 $f'(x)$) 在區間 $(-\infty, \ln 5]$ 為遞增，在區間 $[\ln 5, +\infty)$ 為遞減，而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^x}{(e^x + 5)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^x}{2(e^x + 5)e^x} = 0, \quad (\text{l'Hospital}), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x}{(e^x + 5)^2} = 0, \end{aligned}$$

知斜率之最大下界為 0.

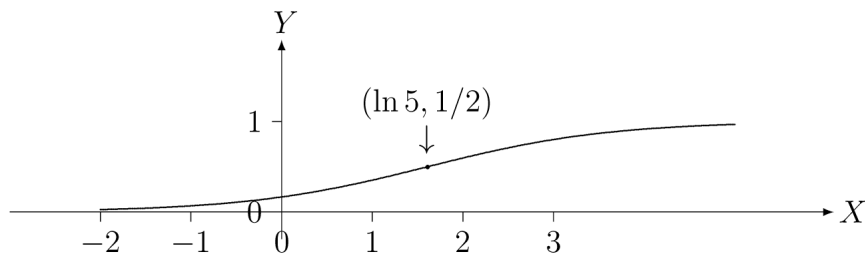


圖 8-8

- ♠ (8-10) 某君立於一圓形游泳池之岸邊，欲到達直徑對岸之點，他可以全部採用步行或游泳，亦可先沿游池岸邊步行一段再以直線游至目的地，若已知此人步行速度為游泳之二倍，問此人應如何選擇其路線，所耗費的時間分別為最短及最長。

分析 本題需要以下幾個步驟：1° 游泳池半徑並不重要，令其為 1 單位，2° 以步行角度為變數 x 寫出所費之全部時間函數，3° 解出上述函數之極值。

【解】 為方便計，令游泳池之半徑為 1，步行速度為 $2v$ ，游泳之速度為 v 。設某君自點 A 先步行 x 單位長度至點 C ，（即圓心角為 x ），再游泳至點 B ，由於 C 至 B 之長度為 $2 \sin \frac{\pi - x}{2}$ ，則其所費之全部時間為

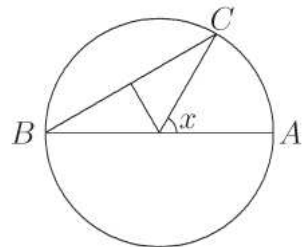


圖 8-9

$$\begin{aligned} f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) &= \frac{x}{2v} + \frac{2}{v} \cdot \sin \frac{\pi - x}{2} \\ &= \frac{x}{2v} + \frac{2}{v} \cdot \cos \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

其次，因

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2v} - \frac{1}{v} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

由於 f 之定義域 $[0, \pi]$ 為一有界閉區間，且 f 為一連續函數，故只需比較 f 之臨界點集合 $\{0, \pi/3, \pi\}$ 的函數值。

$$\begin{aligned}f(0) &= \frac{2}{v}, \\f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2v} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{2}{v} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{v} \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \right), \\f(\pi) &= \frac{\pi}{2v},\end{aligned}$$

顯然 $f(\pi) < f(0) < f(\frac{\pi}{3})$ ，換言之，全部採用步行最快，先走 $\pi/3$ ，(即圓周長的 $1/6$)，再游泳至目的地最慢。

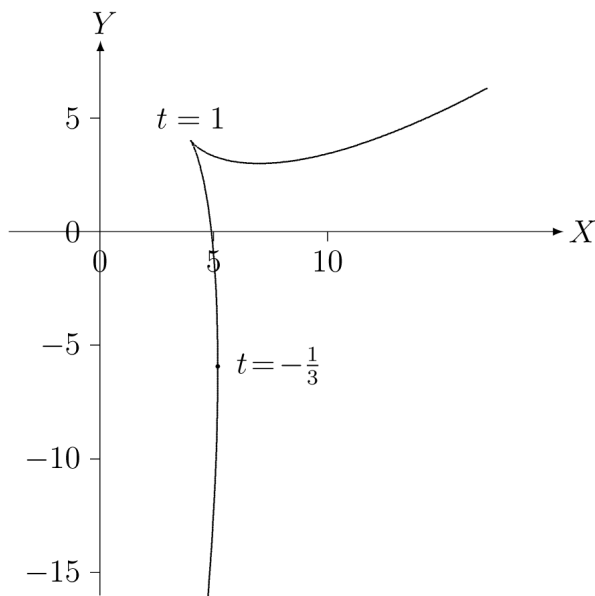


圖 9-1

♠ (9-2) 設 $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$, 試求上述參數方程式在點 t 之導數 $\frac{dy}{dx}$, 並求 $t = 0$ 時此曲線之切線方程式.

分析 特別留意 $\frac{dx}{dt} = 0$ 時之 t .

【解】 1° 由於 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4 \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 2t, \end{cases}$, 是以當 $t \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ 時, $\frac{dy}{dx} = -\frac{t}{2 \sin t}$;

2° 當 $t = \pi$ 時, 由於

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \left| \frac{dy}{dx} \right| = \lim_{t \rightarrow \pi} \left| -\frac{t}{2 \sin t} \right| = +\infty,$$

知 $\frac{dy}{dx}$ 不存在, 同理 $t = 2\pi$ 時, 亦不存在.

3° 當 $t = 0$ 時,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{t}{2 \sin t} = -\frac{1}{2};$$

而切點為 $(x, y) = (4, 0)$, 故此曲線之切線方程式為 $y = -\frac{1}{2}(x - 4)$.

♠ (9-3) 設 $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 4, \\ y = t - 1, \end{cases}$ 試求 $\frac{d^3y}{dx^3}$.

分析 大家都知道 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, 如果 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 可以解決, 那麼 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 也差不多可以解決.

【解】由

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2t - 3, \\ \frac{dy}{dt} = 1, \end{cases}$$

得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{2t-3};$$

其次，因

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2(2t-3)^{-2}}{2t-3} = -2(2t-3)^{-3}.$$

最後，

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12(2t-3)^{-4}}{2t-3} = 12(2t-3)^{-5}. \quad (*)$$

顯然，當 $t = \frac{3}{2}$ 時， $\frac{dy}{dx}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2}$ ， $\frac{d^3y}{dx^3}$ 皆不存在，是以當 $t \in \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$ 時，(*) 方為有效。

♠ (9-4) 設 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 4t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2].$

(a) 試求上述參數方程式在點 t 之導數 $\frac{dy}{dx}$.

(b) 設此曲線與 X 軸相交之點為切點，試求這些切線。

【分析】(a) 題應注意分母為 0 之問題，至於 (b) 題，先由 $y = 0$ (X 軸) 解出 t 值，再找到交點，利用點斜式即可找到切線。

【解】(a) 由於 $\frac{dx}{dt} = \cos t$ ， $\frac{dy}{dt} = -4 \sin 4t$ ，

1° 當 $t \in [0, \pi/2)$ ，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{4 \sin 4t}{\cos t} = -\frac{8 \sin 2t \cos 2t}{\cos t} = -16 \sin t \cos 2t.$$

2° 當 $t = \frac{\pi}{2}$ ， $\frac{dy}{dx}$ 存在，因為 $\lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow \pi/2} -16 \sin t \cos 2t = 16$ 。

是以 $\forall t \in [0, \pi/2]$ ， $\left. \frac{dy}{dx} \right|_t = -16 \sin t \cos 2t$ 。

(b) 由於

曲線和 X 軸相交 $\Leftrightarrow y = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 4t = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$$

$$\Leftrightarrow t \in \{\pi/8, 3\pi/8\}$$

$$\Rightarrow x = \sin \frac{\pi}{8} \text{ 或 } \sin \frac{3\pi}{8}.$$

此時曲線之斜率 (利用 (a) 之結果) 分別為

$$-16 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = -8\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8},$$

及

$$-16 \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = 8\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{8}.$$

故二切線分別為：

$$y = -8\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \left(x - \sin \frac{\pi}{8}\right),$$

$$y = 8\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \left(x - \sin \frac{3\pi}{8}\right).$$

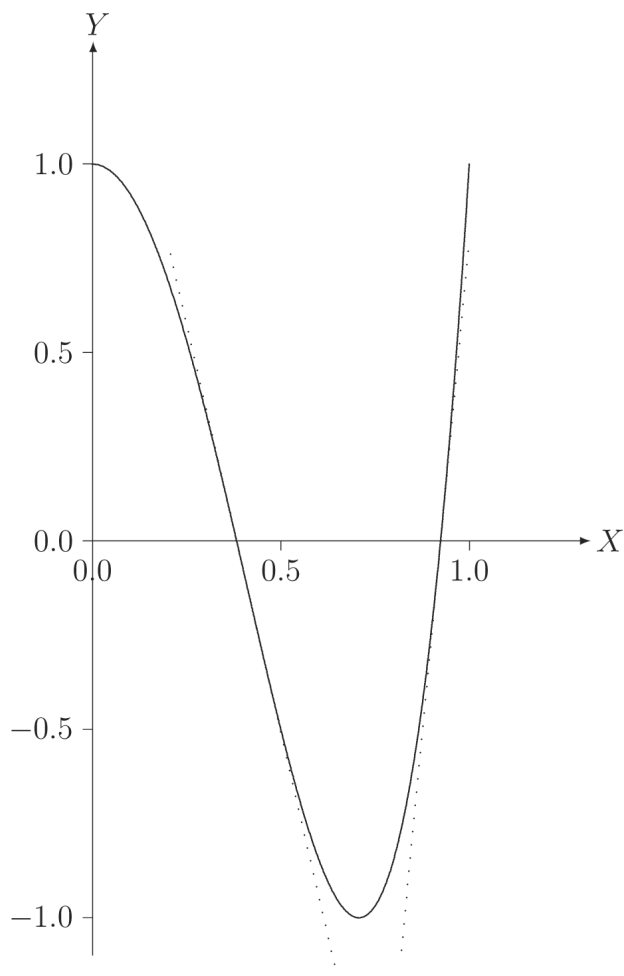


圖 9-2 注意：切線以虛線表示。

♠ (9-5) 試求參數曲線 $\begin{cases} x = 6t + 1, \\ y = t^3 - 2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, 上之點 P 之坐標以使過其上之切線與直線 $2x + 5y - 8 = 0$ 垂直, 並求切線方程式.

分析 先由題意找到切線之斜率, 再求得參數 t 之值, 則可求得切點之坐標, 切線方程式已在掌握之中.

【解】 由於 $\frac{dx}{dt} = 6$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2$. 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2}{6} = \frac{t^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

因切線與直線 $2x + 5y - 8 = 0$ 垂直, 故切線斜率應為 $\frac{5}{2}$, 應有

$$\frac{t^2}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t^2 = 5 \Leftrightarrow t = \pm 5^{1/2}.$$

1° 當 $t = 5^{1/2}$ 時, 切點為 $(6 \cdot 5^{1/2} + 1, 5^{3/2} - 2)$, 故切線為

$$y - 5^{3/2} + 2 = \frac{5}{2}(x - 6 \cdot 5^{1/2} - 1).$$

2° 當 $t = -5^{1/2}$ 時, 切點為 $(-6 \cdot 5^{1/2} + 1, -5^{3/2} - 2)$, 故切線為

$$y + 5^{3/2} + 2 = \frac{5}{2}(x + 6 \cdot 5^{1/2} - 1).$$

♠ (9-6) 橢圓 $\begin{cases} x(t) = 3 \cos(t), \\ y(t) = 2 \sin(t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$, 予以旋轉 $\frac{\pi}{6}$ ($= 30^\circ$), 試寫出新橢圓之參數方程式.

分析 參數圖形旋轉對於電腦圖形用途甚廣, 只要會使用其中之一, 其餘問題即可迎刃而解.

【解】 只需令 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 由轉軸公式知, 旋轉後之點 $(x_1(t), y_1(t))$ 如下:

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos(\theta) \cdot x(t) - \sin(\theta) \cdot y(t), \\ y_1(t) = \sin(\theta) \cdot x(t) + \cos(\theta) \cdot y(t), \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos(\theta) \cdot 3 \cos(t) - \sin(\theta) \cdot 2 \sin(t) \\ \quad = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(t) - \sin(t), \\ y_1(t) = \sin(\theta) \cdot 3 \cos(t) + \cos(\theta) \cdot 2 \sin(t) \\ \quad = \frac{3}{2} \cdot \cos(t) + \sqrt{3} \cdot \sin(t). \end{cases}$$

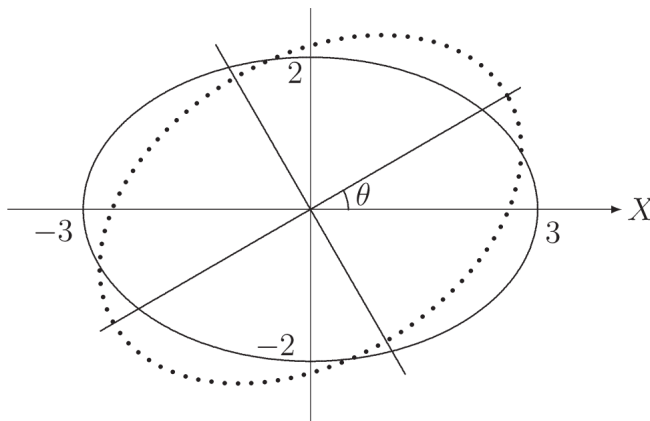


圖 9-3 虛線為旋轉後新橢圓

♠ (9-7) 設 $a > 0$ ，試將參數方程式 $\begin{cases} x = a \sec t, \\ y = a \tan t, \end{cases}$ 中之 t 予以消去而得含 x, y 之方程式，並問其為何種圓錐曲線？又 t 之範圍為何？

分析 我們知道 $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$ ，乃為一半徑為 a 之圓，消去 t 後，成為 $x^2 + y^2 = a^2$ ，本題十分類似。

【解】

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = a \sec t, \\ y = a \tan t, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \sec^2 t, \\ y^2 = a^2 \tan^2 t, \end{cases} \\ &\Rightarrow x^2 - y^2 = a^2. \end{aligned}$$

顯然此乃雙曲線。

- 當 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 時， $x > 0$ ，此為雙曲線之右葉，
- 當 $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 時， $x < 0$ ，此為雙曲線之左葉。

♠ (9-8) 某甲在時間 $t = 0$ 自平面坐標上之點 $(0, -1)$ 出發，沿直線 $y = x - 1$ 於 $t = 1$ 時抵達點 $(1, 0)$ ，沿直線 $y = 1 - x$ 於 $t = 2$ 時抵達點 $(0, 1)$ 。試將某甲之路徑以參數方程或向量函數表之。

分析 直線乃最簡單之曲線，在此考驗讀者如何建構一折線。

【解】在拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第三章中業已說明：

所謂參數方程式 (parametric equations)

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad t \in S, \quad (S \text{ 爲 } \mathbb{R} \text{ 之一非空子集}).$$

乃向量函數 $\mathbf{F}: S \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{F}(t) = (f(t), g(t))$ 之簡寫，
內 f 與 g 爲定義於集合 S 上之二實值函數，我們將先
界定二參數方程，之後再予以合併。

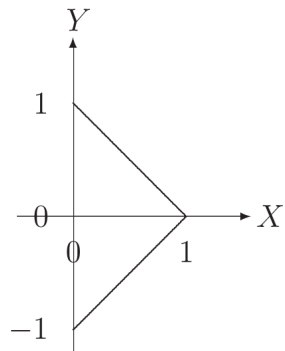


圖 9-4

若令 $\begin{cases} x = t, \\ y = t - 1, \end{cases} \quad t \in [0, 1]$ ，消去 t 後得 $y = x - 1$ 及路徑之第一部分。

若令 $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = t - 1, \end{cases} \quad t \in [1, 2]$ ，消去 t 後得 $y = 1 - x$ 及路徑之第二部分。

故知此路徑爲

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{F}(t) &= \begin{cases} (t, t - 1), & \text{若 } t \in [0, 1], \\ (2 - t, t - 1), & \text{若 } t \in (1, 2]. \end{cases} \\ &= (1 - |t - 1|, t - 1). \end{aligned}$$

(註：上式化簡之構想來自 $f(t)$ 之圖形爲絕對值函數之倒影及平移.)

若以參數方程式表之，則爲：

$$\begin{cases} x = 1 - |t - 1|, \\ y = t - 1, \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

♠ (9-9) 設有一半徑爲 a 之圓，於 X 軸上向右滾動，則圓上一固定點 P 之軌跡稱爲一擺線。已知其軌跡爲

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(參見拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第三章 § 3.13)，若 t 表時間， $(x(t), y(t))$ 表 P 之位置向量。

(a) 試求 P 之速度向量；

(b) 試問 t 爲何值 P 之最大及最小速率。

分析 速度向量乃 $\mathbf{v}(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right)$ ，速率則爲速度向量之絕對值

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2}.$$

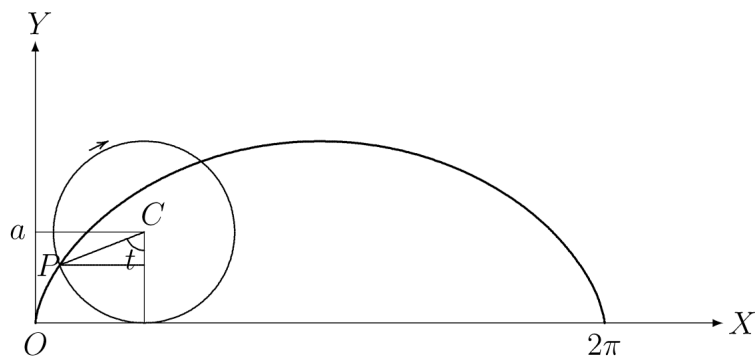


圖 9-5

【解】(a) 由於 $\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a(1 - \cos t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = a \sin t, \end{cases}$ 是以 P 之速度向量為

$$\mathbf{v}(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t).$$

(b) P 之速率為

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{a^2(2 - 2 \cos t)} = \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right|. \end{aligned}$$

顯然當 $t = \pi$ 時， P 速率最快， $t = 0$ 或 2π 時， P 速率最慢。

§ 10 隱函數(單變數)

若方程式 $F(x, y) = 0$ 在點 (x_0, y_0) 之鄰近可界定一隱函數 $f: N(x_0) \rightarrow N(y_0)$, 而 f 在點 x_0 為可微分時, 應如何求出導數 $f'(x_0)$? 其步驟如下:

- (1) 方程式之左右兩端分別對 x 微分之, (視 y 為 x 之函數);
- (2) 移項後, 得 $y' = \dots$;
- (3) 以 (x_0, y_0) 代入其中之 (x, y) 即得所欲求.

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

♠ (10-1) 試求由方程式 $x^2y^2 - 9x^2 - 4y^2 = 0$ 在點 $(\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ 所界定之隱函數 f 之導數.

分析 這種曲線稱為十字曲線 (cruciform), 圖形如下. 本題解法有二, 其一利用隱微分法, 其二先解出 y , 再微分之.

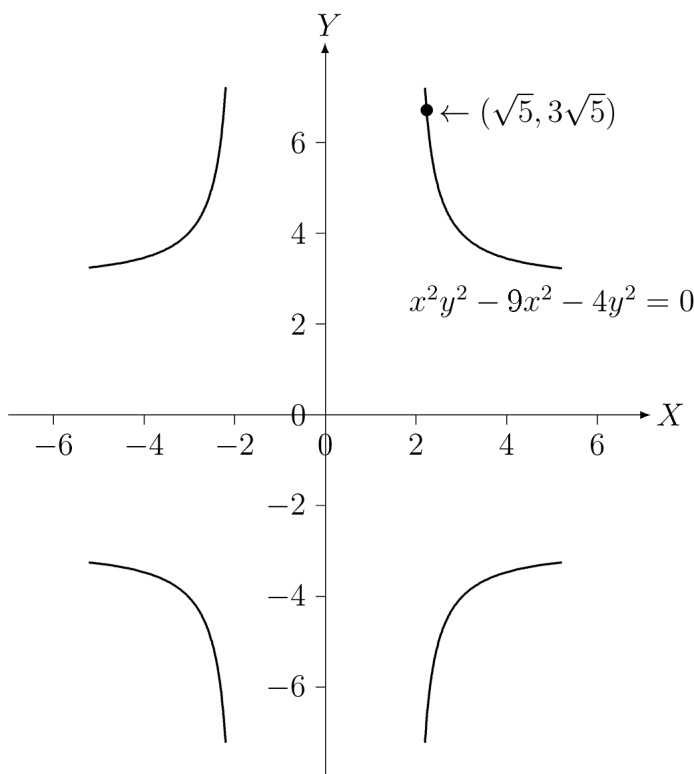


圖 10-1

【解】法一：利用隱微分法，先將方程式 $x^2y^2 - 9x^2 - 4y^2 = 0$ 之兩端分別對 x 微分之，則得

$$2xy^2 + 2x^2yy' - 18x - 8yy' = 0,$$

移項之，得

$$y' = \frac{9x - xy^2}{x^2y - 4y}.$$

將指定點 $(\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ 代入上式，(即以 $\sqrt{5}$ 代 x ，以 $3\sqrt{5}$ 代 y)，故

$$y' = \frac{9\sqrt{5} - \sqrt{5}(3\sqrt{5})^2}{5 \cdot 3\sqrt{5} - 4 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5} - 45\sqrt{5}}{15\sqrt{5} - 12\sqrt{5}} = -12.$$

法二：先解出 y ，

$$\begin{aligned} x^2y^2 - 9x^2 - 4y^2 &= 0 \Rightarrow y^2(x^2 - 4) = 9x^2 \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{9x^2}{x^2 - 4} \\ \Rightarrow y &= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 4}}, \quad (\text{因指定點之 } x > 0, y > 0) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx} \left(3x \cdot (x^2 - 4)^{-1/2} \right) \\ &= 3 \cdot (x^2 - 4)^{-1/2} + 3x \cdot \frac{-1}{2} \cdot (x^2 - 4)^{-3/2} \cdot 2x \\ &= 3 \cdot (x^2 - 4)^{-1/2} - 3x^2 \cdot (x^2 - 4)^{-3/2}. \end{aligned}$$

以 $x = \sqrt{5}$ 代入，則 $y' = 3 - 15 = -12$.

♠ (10-2) 設雙葉曲線 (bifolium) 方程式為 $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$.

- (a) 試求此曲線上之一點 (x_0, y_0) 滿足 $y_0 = x_0 > 0$;
- (b) 試求此曲線在點 (x_0, y_0) 所界定之隱函數之導數.

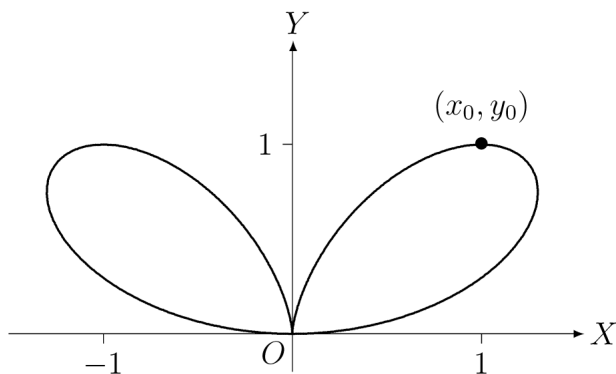


圖 10-2

分析 隱函數之圖形通常不易繪出，但本例係利用極坐標函數而繪製。對於許多人而言，有了圖形對於隱函數不至於感到太深奧難測。

【解】(a) 依題意，先將給定之條件代入原方程式，

$$\begin{aligned}y_0 = x_0 > 0 &\Rightarrow (x_0^2 + x_0^2)^2 = 4x_0^2x_0 > 0 \\&\Rightarrow 4x_0^4 = 4x_0^3 > 0 \\&\Rightarrow x_0 = 1, y_0 = 1.\end{aligned}$$

(b) 方程式為 $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$ 之兩端分別對 x 微分之，則得

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 8xy + 4x^2y',$$

移項之，得 $y' = \frac{2xy - x^3 - xy^2}{x^2y + y^3 - x^2}$ ，以 $(x_0, y_0) = (1, 1)$ 代入上式之 (x, y) ，得 $y' = 0$ 。

♠ (10-3) 設內擺線 (hypocycloid) 方程式為 $y^{2/3} + x^{2/3} = 13$ 。

(a) 試利用隱函數微分法以求在點 $(27, 8)$ 之 y' ；

(b) 試利用參數方程微分法以解 (a) 題之 y' 。

【分析】內擺線之參數方程式為 $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta, \end{cases} \theta \in [0, 2\pi]$ ，本題中 $a^{2/3} = 13$ ，即

$a = 13^{3/2} = 13\sqrt{13}$ 。(建議讀者參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第三章 §3.13.)

【解】(a) 先將方程式 $y^{2/3} + x^{2/3} = 13$ 之兩端分別對 x 微分之，則得

$$\frac{2}{3}y^{-1/3}y' + \frac{2}{3}x^{-1/3} = 0,$$

移項之，得 $y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$ 。將指定點 $(27, 8)$ 代入，則 $y' = -\frac{8^{1/3}}{27^{1/3}} = -\frac{2}{3}$ 。

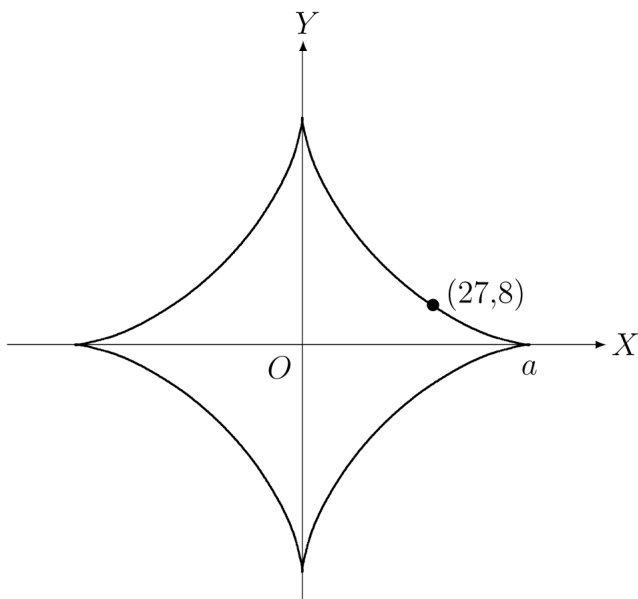


圖 10-3

(b) 內擺線之參數方程式爲 $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta, \end{cases} \theta \in [0, 2\pi]$, 其中 $a = 13\sqrt{13}$. 由

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 \theta \sin \theta, \\ \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta, \end{cases}$$

當 $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a \sin^2 \theta \cos \theta}{-3a \cos^2 \theta \sin \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (*)$$

因指定點爲 $(27, 8)$,

$$27 = x = a \cos^3 \theta \Rightarrow \cos^3 \theta = \frac{27}{a} = \frac{27}{13^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{13^{1/2}},$$

$$8 = y = a \sin^3 \theta \Rightarrow \sin^3 \theta = \frac{8}{a} = \frac{8}{13^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{13^{1/2}}.$$

代入 (*) 式, 得 $y' = -\frac{2}{3}$.

♠ (10-4) 若函數 g 爲可微分且 $g\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) = x$, 求 $g'(1)$.

分析 我們可利用隱微分法或先解出函數 g 再求 $g'(1)$.

【解】法一：先將方程式 $g\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) = x$ 之兩端分別對 x 微分之, 則得

$$g'\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) \cdot \frac{3 \cdot (2x+1) - 2(3x-2)}{(2x+1)^2} = 1,$$

亦即

$$g'\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) \cdot \frac{7}{(2x+1)^2} = 1. \quad (*)$$

其次, 由

$$\frac{3x-2}{2x+1} = 1 \Leftrightarrow 3x-2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 3.$$

代入 (*) 式, 得 $g'(1) \cdot \frac{7}{7^2} = 1$, 故 $g'(1) = 7$.

法二：我們先解出函數 g . 令 $t = \frac{3x-2}{2x+1}$,

$$\begin{aligned} t = \frac{3x-2}{2x+1} &\Leftrightarrow 2xt + t = 3x - 2 \\ &\Leftrightarrow x(2t-3) = -(2+t) \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2+t}{2t-3} \end{aligned}$$

故 $g\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) = x$ 乃對等於 $g(t) = -\frac{2+t}{2t-3}$, 是以

$$g'(t) = -\frac{(2t-3) - 2(2+t)}{(2t-3)^2} = \frac{7}{(2t-3)^2}.$$

得 $g'(1) = 7$.

♠ (10-5) 試求 $xy = 1$ 與 $x^2 - y^2 = 4$ 之交點; 並證在此點二曲線之切線正交.

分析 這兩對十分常見的雙曲線, 前者可以化爲顯函數 (explicit function), 後者則爲隱函數 (implicit function).

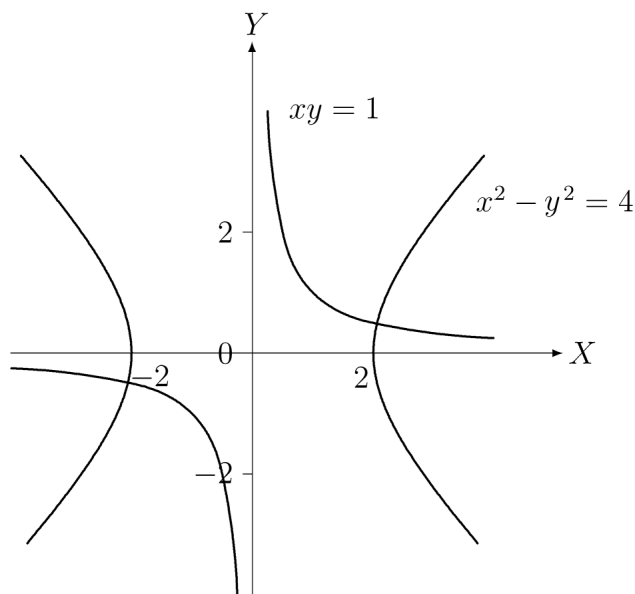


圖 10-4

【解】 1° 先求交點, $xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$ 代入 $x^2 - y^2 = 4$ 中,

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{1}{x^2} = 4 &\Leftrightarrow x^4 - 1 = 4x^2 \\
 &\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = \frac{4 + \sqrt{16 + 4}}{2} = 2 + \sqrt{5} \\
 &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{5}} \\
 &\Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{5}}}.
 \end{aligned}$$

是以二交點為

$$\begin{aligned}
 (x_1, y_1) &= \left(\sqrt{2 + \sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{5}}} \right), \\
 (x_2, y_2) &= \left(-\sqrt{2 + \sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{5}}} \right).
 \end{aligned}$$

2° 在點 (x_1, y_1) . 對於曲線 $xy = 1$, 可先化為 $y = \frac{1}{x}$, 其切線斜率為 $m_1 = -\frac{1}{x_1^2}$; 對於曲線 $y^2 - x^2 = 4$, 方程式之左右兩端分別對 x 微分之, 則

$$2yy' - 2x = 0,$$

移項之得 $y' = \frac{x}{y}$, 其切線斜率為 $m_2 = \frac{x_1}{y_1}$, 因此二斜率之積

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} = -\frac{1}{x_1 y_1} = -1.$$

故知在此點二曲線之切線正交.

3° 在交點 (x_2, y_2) 情況相同.

♠ (10-6) 試求方程式 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 上導數為 0 之點.

分析 這種曲線稱為笛卡爾葉線 (Folium of Descartes). 以隱函數方法求出 y' 後, 令之為 0 以解出所求之點.

【解】 1° 方程式之左右兩端分別對 x 微分之, (視 y 為 x 之函數), 則

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0.$$

2° 移項後, 得 $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$, (注意分母不得為 0).

3° 令 $y' = 0$, 則

$$\begin{aligned} y = x^2 &\Rightarrow x^3 + (x^2)^3 - 3x \cdot x^2 = 0, \quad (\text{代入原方程式}) \\ &\Rightarrow x^3(x^3 - 2) = 0 \\ &\Rightarrow x = 2^{1/3}, \quad (x \neq 0, \because y' \text{ 之分母不得為 } 0) \\ &\Rightarrow \text{所求之點為 } (2^{1/3}, 2^{2/3}). \end{aligned}$$

註：笛卡爾發明此一曲線乃說明：隱微分法在點 $(0,0)$ 並無法求出其斜率。

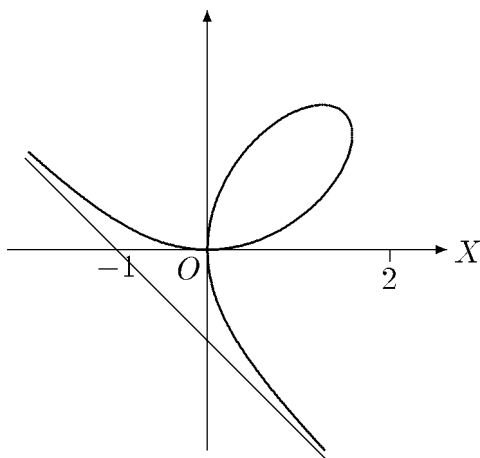


圖 10-5

♥ (10-7) 方程式 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 為一旋轉後之橢圓，試求 y 之最大值及最小值。

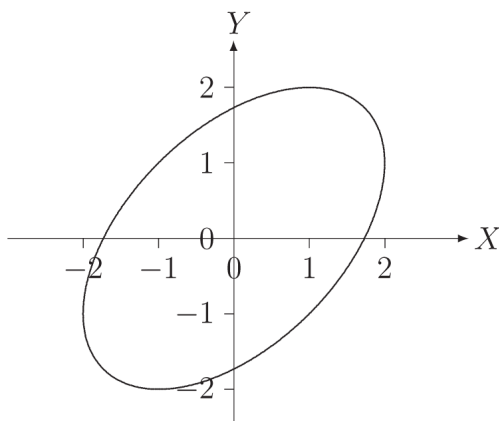


圖 10-6

分析 利用隱微分法，求出 $y' = 0$ 之點 x ，並設法判定其為橢圓之最大、最小值。

【解】1° 方程式之左右兩端分別對 x 微分之, (視 y 為 x 之函數), 則

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0.$$

移項後, 得

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}. \quad (*)$$

(注意分母不得為 0) .

2° 令 $y' = 0$, 則

$$\begin{aligned} y = 2x &\Rightarrow x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3, \quad (\text{代入原方程式}) \\ &\Rightarrow 3x^2 = 3 \\ &\Rightarrow x^2 = 1 \\ &\Rightarrow \text{所求之點為 } (-1, -2) \text{ 或 } (1, 2). \end{aligned}$$

3° 其次, (*) 式中分母為 0 時並無意義, 此時橢圓有垂直切線, 仿 2°,

$$\begin{aligned} 2y = x &\Rightarrow x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 3, \quad (\text{代入原方程式}) \\ &\Rightarrow \frac{3x^2}{4} = 3 \\ &\Rightarrow x^2 = 4 \\ &\Rightarrow \text{所求之點為 } (-2, -1) \text{ 或 } (2, 1). \end{aligned}$$

4° 由於橢圓在 Y 軸上之投影為一有界閉區間, 必存在最大值及最小值, 而由 2° 及 3° 知 x 只有四個臨界點 $\{-2, -1, 1, 2\}$, 比較其 y 值, 分別為 $-1, -2, 2, 1$, 故知此橢圓之最大值為 2, 最小值為 -2 .

§ 11 Taylor 定理

第七單元的均值定理，曾經給我們帶來某些驚喜的結論，諸如零導數定理，由導數之正負判別函數之增減等等。本節的 Taylor 定理正是均值定理的推廣，它也帶來相當精細的結論。其中以極大極小的判別以及函數值近似值之求得最具代表性。以下是 Taylor 定理 [其中的 (★) 稱為 Taylor 公式 (或展開式)，讀者請參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第四章 § 4.1.]:

設 I 為一區間, $p \in I$, f 於 I 上為 n 階可微, 則 $\forall x \in I \setminus \{p\}$, 存在 c 介於 p 與 x 之間, 使得

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n. \quad (\star)$$

上式最後一項 $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$ 稱為此展開式之餘項 (remainder), 並記為 $R_n(x)$.

♠ (11-1) 設 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$.

- (a) 試求 f 之四階 Maclaurin 展開式;
- (b) 利用 (a) 證明 f 在點 0 有最小值.

分析 Maclaurin 展開式乃函數在點 0 之 Taylor 展開式.

【解】(a) 由於

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + e^{-x} + 2 \cos x, & f(0) &= 4, \\ f'(x) &= e^x - e^{-x} - 2 \sin x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2 \cos x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= e^x - e^{-x} + 2 \sin x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \end{aligned}$$

故 f 在點 0 之四階 Maclaurin 展開式為

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \\ &= 4 + \frac{e^c + e^{-c} + 2 \cos c}{4!}x^4, \end{aligned}$$

其中 $x \neq 0$, c 介於 0 與 x 之間, 上式最後一項即為餘項 $R_4(x)$.

(b) 由於 $e^c + e^{-c} + 2 \cos c = 2(\cosh c + \cos c) > 0$, ($\because \cosh c > 1 \geq -\cos c$), 故

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = 4 + \frac{1}{4!}(e^c + e^{-c} + 2 \cos c)x^4 > 4 = f(0).$$

故 f 在點 0 有最小值.

♠ (11-2) 設函數 f 於區間 $I = [a, b]$ 為二階可微分, 又 $f'' > 0$. 試利用二階 Taylor 展開式證明: $\forall p \in [a, b]$, f 在點 $(p, f(p))$ 之切線必在 f 之圖形之下.

分析 f 在點 $(p, f(p))$ 之切線為 $y = f(p) + f'(p)(x - p)$, 因此我們應證明:

$$\forall x \in I \setminus \{p\}, \quad f(x) > f(p) + f'(p)(x - p).$$

【證】 f 在點 p 之二階 Taylor 展開式為

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{f''(c)}{2!}(x - p)^2,$$

其中 $x \in I \setminus \{p\}$, c 介於 x 與 p 之間. 由原設知 $f'' > 0$, 故

$$f(x) > f(p) + f'(p)(x - p).$$

而 $y = f'(p)(x - p) + f(p)$ 恰為函數 f 在點 $(p, f(p))$ 之切線, 故證得: f 在點 $(p, f(p))$ 之切線必在 f 之圖形之下. (**註**: 除切點外, 曲線皆在每一切線之上).

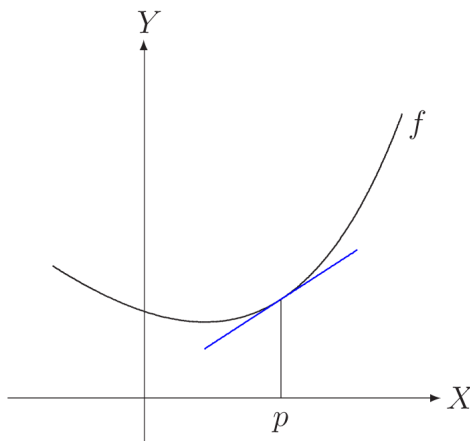


圖 11-1

♠ (11-3)

- 試求 $f(x) = \exp x$ 之 n 階 Maclaurin 展開式;
- 設 $e = \exp(1)$, (Euler's number), 試證: $2.5 < e < 3$.

分析 有關 Euler's number e 的定義有幾種不同方法，我們採用 $e = \exp(1)$ ，本題利用 Taylor 定理將 $\exp$ 在原點展開為三階 Maclaurin 展開式即可解決。

【解】 (a) 由於 $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \exp x$ ，是以 $\exp$ 之 n 階 Maclaurin 展開式為

$$\begin{aligned}\exp x = f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n.\end{aligned}$$

其內 c 介於 0 與 x 之間。

(b) 在 (a) 之展開式中令 $n = 3$, $x = 1$ ，則

$$e = \exp 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{e^c}{3!} \quad (*)$$

其中 $c \in (0, 1)$ 。

1° 由 (*) 式，顯然 $e > 2.5$ ；

2° 其次，由 (*) 左右兩各減 $e/6$ ，則

$$e - \frac{e}{6} = 2.5 + \frac{1}{6}(e^c - e) < 2.5, \quad (\because e > e^c),$$

是以 $e < \frac{6}{5} \times 2.5 = 3$ 。

[註]：證明中提到 $e > e^c$ ，更詳細的理由是：

$$\exp' x = \exp x > 0 \Rightarrow \exp \text{ 爲遞增} \Rightarrow \exp 1 > \exp c.$$

♥ (11-4) (續上題) 試證：Euler 數 e 爲一無理數。

分析 有理數就是分數，無理數乃非分數之實數，證明某數爲一無理數的方法通常利用矛盾證法，假設其爲一分數，最後導得矛盾之結論。

【證】 我們將以反證法證之。假定 e 爲一有理數，即存在二互質自然數 p, q 使得 $e = p/q$ 。由上題之 (a) 我們知

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + R_n(1),$$

內 $R_n(1) = \frac{e^c}{n!}$, $c \in (0, 1)$ 。

1° $(n-1)! R_n(1) = \frac{e^c}{n} > 0$ 。

2° $(n-1)! R_n(1) = \frac{e^c}{n} < \frac{e}{n} < 1$ ，當 $n \geq 3$ 時。

$$\begin{aligned}
 3^\circ \quad (n-1)! R_n(1) &= (n-1)! \left(e - \left(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \right) \right) \\
 &= (n-1)! \frac{p}{q} - (n-1)! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \right).
 \end{aligned}$$

當 $n-1 \geq q$ 時，上式右端之二項均為整數。

由以上三點知，當 $n \geq \max\{q+1, 3\}$ 時， $(n-1)! R_n(1)$ 既為一整數，又介於 0 與 1 之間，顯為矛盾。

♠ (11-5) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \sin x$.

- (a) 試求 f 之 n 階 Maclaurin 展開式；
- (b) 試求 f 在點 0 之 1, 3, 5, 6 階優良近似多項式；
- (c) 試繪出 f, P_1, P_3, P_5 之圖。

分析 所謂函數 f 在點 p 之 n 階優良近似多項式，係指 n 次多項式 $P_n(x)$ 滿足

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-p)^n} = 0.$$

在此應為 f 之 n 次 Maclaurin 多項式。

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j,$$

(參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第四章 §4.1)

【解】(a) 由於

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\
 f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\
 f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\
 f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\
 f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0, \\
 \vdots & & \vdots & \\
 f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, \\
 f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x,
 \end{aligned}$$

顯然 $\sin$ 在點 0 之偶數階導數皆為 0。

■ 若 n 為奇數，令 $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ ，則 $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\exists c \in (0, x)$ or $(x, 0)$ 使得

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} + R_{2k+1}(x) \\
 &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{(-1)^k \cos c}{(2k+1)!}x^{2k+1}.
 \end{aligned}$$

此乃為 $\sin x$ 之 $n = 2k + 1$ 階 Maclaurin 展開式.

■ 若 n 為偶數, 令 $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, 則 $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\exists c \in (0, x)$ or $(x, 0)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1} + R_{2k}(x) \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{(-1)^k \sin c}{(2k)!}x^{2k}. \end{aligned}$$

此乃為 $\sin x$ 之 $n = 2k$ 階 Maclaurin 展開式.

(b) f 在點 0 之 1, 3, 5, 6 階優良近似多項式分別為

$$P_1(x) = x,$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + 0 = P_5(x).$$

(c) f , P_1 , P_3 , P_5 之圖:

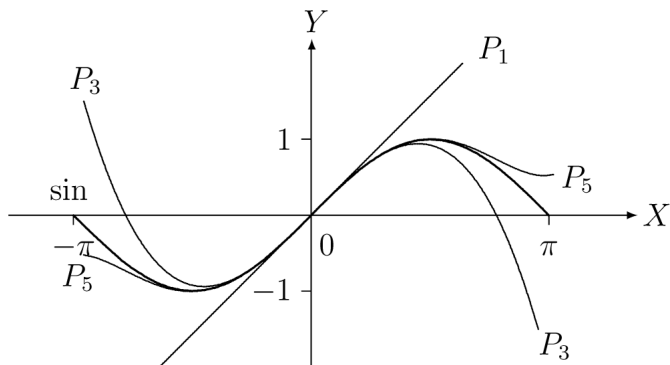


圖 11-2 粗線為 $\sin$

♠ (11-6) 試證: $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

分析 本題含有二不等式, 利用 $\ln(1+x)$ 之 Maclaurin 展開式, 可以證明第二不等式, 但第一不等式必須另想辦法.

【證】 法一: 由於

$$D \ln(1+x) = (1+x)^{-1},$$

$$D^2 \ln(1+x) = -(1+x)^{-2},$$

$$D^3 \ln(1+x) = 2!(1+x)^{-3},$$

故 $\ln(1+x)$ 之三階 Maclaurin 展開式爲：對於 $0 < x < 1$ ， $\exists c \in (0, x)$ 使得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3} < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

其次證明第一不等式，令 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3+3x}$ ，則因

$$f'(x) = (1+x)^{-1} - 1 + x - \frac{x^2}{1+x} + \frac{x^3}{3(1+x)^2} = \frac{x^3}{3(1+x)^2} > 0, \quad \forall x > 0,$$

知 f 在 $[0,1]$ 上爲遞增，且因 $f(0) = 0$ ，故知 $f(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ ，亦即

$$\ln(1+x) > x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3+3x}, \quad \forall x \in (0,1).$$

法二：爲方便計，令

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = \ln(1+x), \quad h(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

只需證明：① $f(0) = g(0) = h(0)$ ，② $f'(x) < g'(x) < h'(x), \forall x > 0$ 即可。

1° ① 顯然爲真。

2° 往證 ②。由於

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x + x^2 \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{x^3}{3(1+x)^2} \\ &= \frac{1-x^2+x^2}{1+x} - \frac{x^3}{3(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x} \left(1 - \frac{x^3}{3+3x} \right), \\ g'(x) &= \frac{1}{1+x}, \\ h'(x) &= 1 - x + x^2, \end{aligned}$$

今

$$\begin{aligned} g'(x) - f'(x) &= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{x^3}{3+3x} > 0, \quad \forall x > 0, \\ h'(x) - g'(x) &= 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} > 0, \quad \forall x > 0, \end{aligned}$$

♠ (11-7) 試求 $f(x) = \sqrt{1-x}$ 之 n 階 Maclaurin 展開式。

分析

本題之關鍵在於：由 f 之一至四階導數推得 $n-1$ 階及 n 階導數。

【解】由於

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1-x)^{1/2}, & f(0) &= 1, \\
 f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}, & f'(0) &= -\frac{1}{2}, \\
 f''(x) &= -\frac{1}{2^2}(1-x)^{-3/2}, & f''(0) &= -\frac{1}{2^2}, \\
 f'''(x) &= -\frac{1 \cdot 3}{2^3}(1-x)^{-5/2}, & f'''(0) &= -\frac{1 \cdot 3}{2^3}, \\
 f^{(4)}(x) &= -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4}(1-x)^{-7/2}, & f^{(4)}(0) &= -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4}, \\
 &\vdots & & \\
 f^{(n-1)}(x) &= -\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-5)}{2^{n-1}}(1-x)^{-(2n-3)}, & f^{(n-1)}(0) &= -\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-5)}{2^{2n-1}}, \\
 f^{(n)}(x) &= -\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n}(1-x)^{-(2n-1)},
 \end{aligned}$$

是以 f 之 n 階 Maclaurin 展開式為 $\forall x \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$, $\exists c \in (0, x)$ 或 $(x, 0)$ 使得

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x) \\
 &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),
 \end{aligned}$$

$$\text{內 } R_n(x) = -\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n! (1-c)^{2n-1}}x^n.$$

♠ (11-8) 試證：Taylor 定理（參見本單元之始）之餘項 $R_n(x)$ 滿足

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R_n(x)}{(x-p)^{n-1}} = 0.$$

亦即 $R_n(x)$ 趨近於 0 較 $(x-p)^{n-1}$ 為快，因此 Taylor 公式亦可寫為

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \cdots \\
 &\quad + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + o((x-p)^{n-1}).
 \end{aligned}$$

分析 此處使用德國數學家 Landau 的 small o notation： $o((x-p)^{n-1})$ ，因其涉及極限觀念，若可能引起誤解時，應加說明 $x \rightarrow p$ （趨近於何點）。

本題屬於理論性問題，但對若能弄清楚，對於 Taylor 定理之了解肯定有相當幫助。此外，在《機率論》證明中央極限定理時，需要使用本題之結論。

【證】

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow p} \frac{R_n(x)}{(x-p)^{n-1}} &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n}{(x-p)^{n-1}}, \quad (c \text{ 介於 } p \text{ 與 } x \text{ 之間}) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p) \\ &= 0, \quad (\text{見下註}).\end{aligned}$$

[註]：見拙著《微積分學・電子書 2.1 版》第四章引理 4.6： $\lim_{x \rightarrow p} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(p)$.

§ 12 近似值問題

甲、近似函數值：

- 利用「微分函數」(differential function)，迅速但不精細。
- 利用「Taylor 展開式」：在 Taylor 定理中，若函數 f 於 $N_\delta(p)$ 為 n 階可微，則 $\forall x \in N_\delta^*(p), \exists c \in (p, x)$ 或 (x, p) 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n \\ &= P_{n-1}(x) + R_n(x). \end{aligned}$$

我們將以 $P_{n-1}(x)$ 做為 $f(x)$ 之一近似值，而視 $R_n(x)$ 則為誤差。（參見拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第四章第一節及第五節。）

[註]：利用「微分函數」方法等於只利用 $P_1(x)$ 做為 $f(x)$ 之近似值，不討論誤差之控制。

乙、近似根值：以 Newton 迭代法，求 $f(x) = 0$ 之根的近似值，應有以下諸步驟。

若欲解方程式 $f(x) = 0$ 之一近似根至小數第 k 位。

- 1° 先求 $f'(x)$ ；
- 2° 令 $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ；
- 3° 利用 Bolzano 定理或繪圖法，估計欲求之根 r 的大略位置，令之為 x_1 。其次求

$$\begin{aligned} x_2 &= g(x_1), \text{ 至小數 } k+1 \text{ 位,} \\ x_3 &= g(x_2), \text{ 至小數 } k+1 \text{ 位,} \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= g(x_n), \text{ 至小數 } k+1 \text{ 位,} \end{aligned}$$

直至 x_{n+1} 與 x_n 之前 $k+1$ 位小數相同時停止。

- 4° 由上述 x_n 以四捨五入法求出 k 位小數之近似值 s 。
- 5° 驗算：令 $\epsilon = 10^{-k}/2$ ，若 $f(s+\epsilon)$ 與 $f(s-\epsilon)$ 異號，則 s 確為吾人所需。理由為

$$s - \epsilon < r < s + \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < r - s < \epsilon \Leftrightarrow |r - s| < \epsilon = 10^{-k}/2.$$

♠ (12-1) 試利用「微分函數」(differential function) 以求 $\sqrt{8.98}$ 之近似值.

分析 當 $|h|$ 很小時, $f'(p) \cdot h$ 可做為 $f(p+h) - f(p)$ 之近似值. 但當 $|h|$ 並非很小時, 這種方法並不精確, 應改以 Taylor 定理方法解決.

(不少學者習慣以 $dy = y' dx$ 做為 $\Delta y \stackrel{\text{def}}{=} f(x+dx) - f(x)$ 之近似值.)

【解】 設 $f(x) = \sqrt{x}$, $p = 9$, $h = -0.02$, 則

$$\begin{aligned}\sqrt{8.98} &= f(8.98) = f(9 - 0.02) \\ &= f(p+h) \\ &\approx f(p) + f'(p) \cdot h \\ &= f(9) + f'(9) \cdot (-0.02) \\ &= \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-0.02) \\ &= 2.9967.\end{aligned}$$

♠ (12-2) 試以下列方法求 $\sqrt{3}$ 之近似值, 使誤差之絕對值小於 $5 \cdot 10^{-5}$.

- (a) 以 Taylor 展開式求之;
(b) 以 Newton 迭代法求之.

分析 以 Taylor 展開式求近似值時, 必須令餘項之絕對值 $|R_n(x)|$ 小於指定誤差 $5 \cdot 10^{-5}$, 再以逆推法求出 n , 最後再以 $n-1$ 次 Taylor 多項式 $P_{n-1}(x)$ 做為原題之近似值.

【解】 (a) 因 $\sqrt{3} = \sqrt{4-1}$, 故令 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \sqrt{x}$, 則

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2} x^{-1/2}, & f'(4) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} x^{-3/2}, & f''(4) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}, \\ f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} x^{-5/2}, & f'''(4) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{2^5}, \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdots \frac{-(2n-5)}{2} x^{-(2n-3)/2}, \\ &f^{(n-1)}(4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdots \frac{-(2n-5)}{2} \cdot \frac{1}{2^{2n-3}}, \\ f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdots \frac{-(2n-3)}{2} x^{-(2n-1)/2} = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot x^{(2n-1)/2}}.\end{aligned}$$

是以 f 在點 $p = 4$ 之 Taylor 展開式為

$$\begin{aligned} f(x) &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(4)}{(n-1)!}(x-4)^{n-1} + R_n(x) \\ &= 2 + \frac{x-4}{2^2} - \frac{(x-4)^2}{2! \cdot 2^5} + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-5)}{(n-1)! \cdot 2^{3n-4}} (x-4)^{n-1} + R_n(x), \end{aligned}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-4)^n = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n! \cdot c^{(2n-1)/2}} (x-4)^n.$$

c 介於 4 與 x 之間，令 $x = 3$ ，餘項為誤差，由題意應有，

$$\begin{aligned} |R_n(3)| < 5 \cdot 10^{-5} &\Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n! \cdot c^{(2n-1)/2}} (3-4)^n \right| < 5 \cdot 10^{-5} \\ &\Leftrightarrow \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n! \cdot 3^{(2n-1)/2}} < 5 \cdot 10^{-5}, \\ &\quad \left(\because c \in (3, 4) \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{3} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n! \cdot 3^{n-1}} < 5 \cdot 10^{-5}, \quad \left(\because 3^{(2n-1)/2} > 3^{n-1} \right) \\ &\Leftrightarrow n \geq 7, \quad (\text{令 } n = 1, 2, \cdots \text{ 逐一測試.}) \end{aligned}$$

此時，

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \text{ 之近似值 } &= P_6(x) = 2 - \frac{1}{1! \cdot 2^2} - \frac{1}{2! \cdot 2^5} - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4! \cdot 2^{11}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{5! \cdot 2^{14}} \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{6! \cdot 2^{17}} \\ &= 1.7321. \end{aligned}$$

- (b) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2 - 3$ ，則 $f(x) = 0$ 之一根為 $3^{1/2}$ ，誤差之絕對值小於 $5 \cdot 10^{-5}$ 代表近似根至小數第 4 位。因為 $f'(3^{1/2}) = 2 \cdot 3^{1/2} \neq 0$ ，又 $f''(x) = 2$ 為連續，滿足牛頓迭代法之條件。令

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 3}{2x} = \frac{x^2 + 3}{2x},$$

取 $x_1 = 2$ ，則

$$x_2 = g(x_1) = 1.75,$$

$$x_3 = g(x_2) = 1.73214,$$

$$x_4 = g(x_3) = 1.732105,$$

$$x_5 = g(x_4) = 1.732105.$$

令近似根 $s = 1.7321$ ，則因 $f(1.73205) < 0$ ， $f(1.73215) > 0$ ，知 $s = 1.7321$ 爲所欲求。

♠ (12-3)

- (a) 試求 $\cos$ 之 n 階 Maclaurin 展開式，其中 n 爲奇數；
 (b) 利用 (a) 以求 $\cos 5^\circ$ 之近似值至第六位小數（即誤差之絕對值小於 $5 \cdot 10^{-7}$ ）。

分析 可能有人認爲要解決 $\cos 5^\circ$ 之近似值只要打開計算器或電腦即可，不需如此大費周章，其實，電腦中正是以 Taylor (or Maclaurin) 展開式解決諸特殊函數之近似值。

【解】 (a) 令 $f(x) = \cos x$ ，則

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1, \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x, & f^{(4)}(0) &= 1, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \cos x, \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} \sin x, \end{aligned}$$

顯然 $\cos$ 在點 0 之奇數階導數皆爲 0。

n 爲奇數，令 $n = 2k + 1$ ， $k \in \mathbb{N}$ ，則 $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ， $\exists c \in (0, x)$ or $(x, 0)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} + R_{2k+1}(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{(-1)^{k+1} \sin c}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

此乃爲 $\sin x$ 之 $n = 2k + 1$ 階 Maclaurin 展開式。

- (b) 由題意“誤差之絕對值”小於 $5 \cdot 10^{-7}$ ，令 $x = 5^\circ = \frac{5 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{36}$ ，應有

$$\begin{aligned} |R_{2k+1}(x)| < 5 \cdot 10^{-7} &\Leftrightarrow \left| \frac{\sin c}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^{2k+1} \right| < 5 \cdot 10^{-7} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^{2k+1} < 5 \cdot 10^{-7} \\ &\Leftrightarrow \frac{10^7}{5} \left(\frac{\pi}{36}\right)^{2k+1} < (2k+1)! \\ &\Leftrightarrow k \geq 2, \quad (\text{註}) \end{aligned}$$

(註：利用計算器，令 $k = 1, 2$ 逐一測試，此處 $k = 2$ 即已成功.)

取 $k = 2$, 則

$$P_4(0.0872665) = 1 - \frac{(0.0872665)^2}{2} + \frac{(0.0872665)^4}{24} = 0.9961947.$$

故 $\cos 5^\circ$ 六位小數之近似值為 0.996195.

♠ (12-4)

- (a) 試求 $f(x) = \sinh x$ 之 n 階 Maclaurin 展開式；
 (b) 試求 $\sinh 1$ 之一近似值，使其誤差之絕對值小於 10^{-4} .

分析 由給定「誤差之絕對值」範圍以求項數 n 時，常遭遇 $|f^{(n)}(c)|$ 之上界如何求得，一旦克服，困難也可迅速解決。

【解】(a) 由於

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cosh x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= \sinh x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= \cosh x, & f'''(0) &= 1, \\ f^{(4)}(x) &= \sinh x, & f^{(4)}(0) &= 0, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2k-1)}(x) &= \cosh x, & f^{(2k-1)}(0) &= 0, \\ f^{(2k)}(x) &= \sinh x, \end{aligned}$$

故 f 之 $n = 2k$, ($k \in \mathbb{N}$), 階 Maclaurin 展開式為 $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\exists c \in (0, x)$ 或 $(x, 0)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{f^{(2k)}(c)}{(2k)!}x^{2k} \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x). \end{aligned}$$

$$\text{內 } R_{2k}(x) = \frac{\sinh c}{(2k)!}x^{2k}.$$

(註： n 為奇數時， f Maclaurin 展開式同理，略之.)

(b) 由原設“誤差之絕對值”小於 10^{-4} 知

$$\begin{aligned}
 |R_{2k}(1)| < 10^{-4} &\Leftrightarrow \frac{\sinh c}{(2k)!} < 10^{-4} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1.5}{(2k)!} < 10^{-4}, \\
 &\left(\because 0 < \sinh c < \sinh 1 = \frac{e - e^{-1}}{2} < \frac{e}{2} < \frac{3}{2} \right) \\
 &\Leftrightarrow k \geq 4.
 \end{aligned}$$

亦即 $\sinh 1$ 之近似值為 $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} = 1.1752$.

♠ (12-5)

- (a) 試求 $f(x) = \ln(1+x)$ 之 n 階 Maclaurin 展開式；
 (b) 利用 (a) 求 $\ln 2$ 之近似值時，若欲使誤差之絕對值小於 10^{-5} ，試問 n 至少應為多少？並將近似值表為有限級數（不必化簡）。

分析 題目之用意在於：測試讀者使用逆推法以求「項數」 n 之能力。

【解】 (a) 因為

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (1+x)^{-1}, & f'(0) &= 1, \\
 f''(x) &= -(1+x)^{-2}, & f''(0) &= -1, \\
 f'''(x) &= 2!(1+x)^{-3}, & f'''(0) &= 2!, \\
 f^{(4)}(x) &= -3!(1+x)^{-4}, & f^{(4)}(0) &= -3!, \\
 &\vdots & &\vdots \\
 f^{(n-1)}(x) &= (-1)^n(n-2)!(1+x)^{-n+1}, & f^{(n-1)}(0) &= (-1)^n(n-2)!, \\
 f^{(n)}(x) &= (-1)^{(n+1)}(n-1)!(1+x)^{-n}.
 \end{aligned}$$

對於 $x > 0$ ，（或 $-1 < x < 0$ ），由 Taylor 定理知，存在 $c \in (0, x)$ ，（或 $c \in (x, 0)$ ）使得

$$\begin{aligned}
 \ln(1+x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
 &\quad + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \\
 &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n-1}x^{n-1} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n(1+c)^n}x^n.
 \end{aligned}$$

此為 $f(x) = \ln(1+x)$ 之 n 階 Maclaurin 展開式。

(b) 由題意，令 $x = 1$ ，因誤差之絕對值 $< 10^{-5}$ ，應有

$$\begin{aligned} |R_n(1)| < 10^{-5} &\Leftrightarrow \frac{1}{n(1+c)^n} < 10^{-5} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 10^{-5}, \quad (\because 1/(1+c)^n < 1) \\ &\Leftrightarrow n \geq 10^5. \end{aligned}$$

取 $n = 100,000$ ，此時 $\ln 2$ 之近似值為

$$P_{n-1}(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{99999}.$$

(註：由上述答案知，以此一方法求 $\ln 2$ 之近似值，似乎不太高明，下一題有更好的方法.)

♠ (12-6) (續上題) 利用 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 之 Maclaurin 展開式，試求 $\ln 2$ 之近似值，使其誤差之絕對值小於 10^{-5} 。(提示：令 $x = 1/3$)

分析 上題為求 $\ln 2$ 之近似值，使用 $\ln(1+x)$ ，需要一個 99999 項之級數，改用本法只需不到十項。

【解】 令 $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ 。則 $\forall x \in (-1, 1)$,

$$f'(x) = (1+x)^{-1} + (1-x)^{-1},$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2} + (1-x)^{-2},$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} + 2(1-x)^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = -3!(1+x)^{-4} + 3!(1-x)^{-4},$$

$\vdots$

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)^n(n-2)!(1+x)^{-(n-1)} + (n-2)!(1-x)^{-(n-1)},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} + (n-1)!(1-x)^{-n},$$

故 f 在點之 Maclaurin 展開式為，(n 為奇數)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x) \\ &= 0 + 2x + 0 + \frac{2x^3}{3} + 0 + \cdots + \frac{2x^{n-2}}{n-2} + 0 + R_n(x) \\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{n-2}\right) + R_n(x), \end{aligned}$$

內 $R_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+c)^n} + \frac{1}{(1-c)^n}\right)x^n$ ，而 c 介於 0 與 x 間。令 $x = 1/3$ ，是以

$$\ln 2 = f\left(\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-2) \cdot 3^{n-2}}\right) + R_n\left(\frac{1}{3}\right).$$

由

$$\begin{aligned} \left| R_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| < 10^{-5} &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{1}{(1+c)^n} + \frac{1}{(1-c)^n} \right) \frac{1}{3^n} < 10^{-5} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n3^n} \left(1 + \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^n} \right) < 10^{-5} \\ &\Leftrightarrow n \geq 13. \end{aligned}$$

取 $n = 13$ ，故 $\ln 2$ 之近似值為

$$P_{12} = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} \right) = 0.69315.$$

♠ (12-7) 設 L 乃過點 $(1, 0)$ 且為曲線 $y = x^2$ 之法線，此法線與曲線之交點為 (x_0, x_0^2) ，試求 x_0 之近似值至小數第四位。

分析 本題需先求曲線外之點 $(1, 0)$ 的法線，最後以牛頓迭法解出 x_0 之近似值。

【解】 設 $F(x) = x^2$ ，故 $F'(x) = 2x$ 。點 $(1, 0)$ 和交點為 (x_0, x_0^2) 連線之斜率為 $\frac{x_0^2}{x_0 - 1}$ ，而過點 (x_0, x_0^2) 之切線斜率為 $2x_0$ ，應有

$$\frac{x_0^2}{x_0 - 1} = -\frac{1}{2x_0},$$

亦即 $2x_0^3 + x_0 - 1 = 0$ 。以牛頓迭代法解 x_0 之近似值。

1° 設 $f(x) = 2x^3 + x - 1$ ，則 $f'(x) = 6x^2 + 1$ 。

(注意： f 與 F 勿相混。)

2° 令

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{2x^3 + x - 1}{6x^2 + 1}.$$

3° 由圖中我們可看出 $2x^3 + x - 1 = 0$ 之根 x_0 應在 0.5 附近，取 $x_1 = 0.5$ ，則

$$x_2 = g(x_1) = 0.6,$$

$$x_3 = g(x_2) = 0.58975,$$

$$x_4 = g(x_3) = 0.58975,$$

4° 上述 x_3 之小數第五位四捨五入得 $s = 0.5898$ 。

5° 驗算：因 $f(0.58985) > 0$ ， $f(0.58975) < 0$ ，故知 x_0 之近似值為 0.5898。

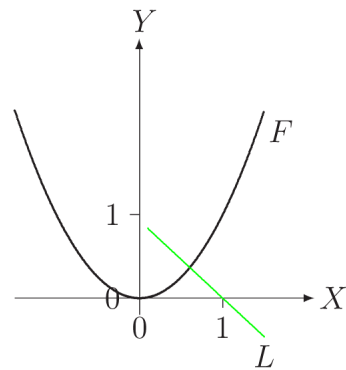


圖 12-1

♠ (12-8) 設曲線 $y = \sin x$ 與 $y = \exp(-x)$ 於最接近原點之交點為 (x_0, y_0) .

- (a) 繪出此二曲線及其交點之簡圖；
 (b) 試求 x_0 之近似值至小數第五位。

分析 繪圖之後得知交點之橫坐標在 0.5 附近，可用以為牛頓迭代法之初始點，解題時則應令 $f(x) = \sin x - e^{-x}$ ，而尋找 $f(x) = 0$ 之根。

【解】(a) 此二曲線及其交點之簡圖如下：

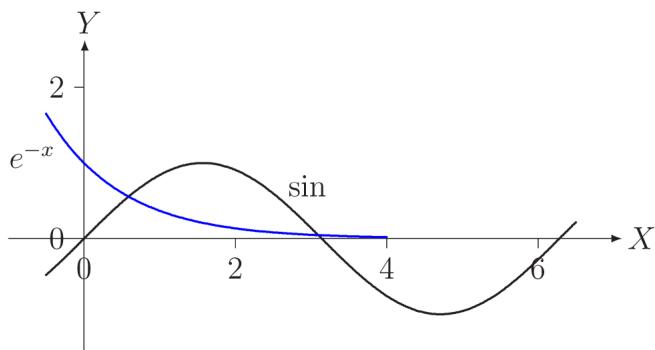


圖 12-2

(b) 設 $f(x) = \sin x - e^{-x}$ ，則 $f'(x) = \cos x + e^{-x}$ ，令

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\sin x - e^{-x}}{\cos x + e^{-x}},$$

利用牛頓迭代法求 $f(x) = 0$ 之根 x_0 ，取 $x_1 = 0.5$ ，則

$$x_2 = g(x_1) = 0.585644,$$

$$x_3 = g(x_2) = 0.588529,$$

$$x_4 = g(x_3) = 0.588533,$$

$$x_5 = g(x_4) = 0.588533,$$

令 $s = 0.58853$ ，則因 $f(0.588525) < 0$ ， $f(0.588535) > 0$ ，故知 x_0 之五位小數近似值為 0.58853。

♠ (12-9) 設過點 $(-1, 0)$ 且與自然對數函數 $\ln$ 相切之切點為 $(a, \ln a)$ ，試以 Newton 迭代法，求之 a 之近似值至第四位小數。

分析 為了方便，微積分教師常設計相對容易計算的題目，然而應用上又常遇到難以處理的問題，此時，近似值就成了最佳工具。

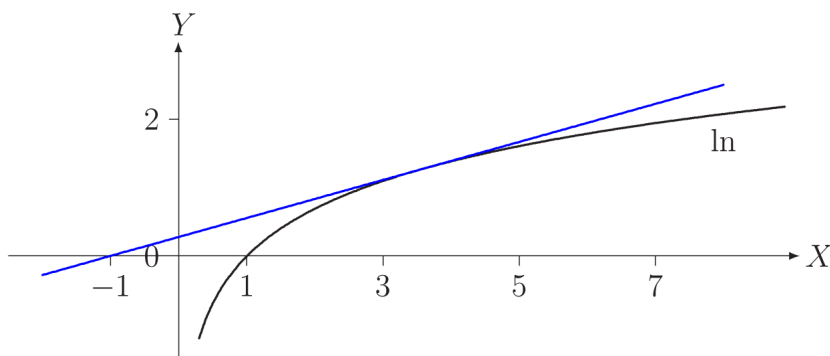


圖 12-3

【解】切點為 $(a, \ln a)$ ，切線之斜率為 $\ln'(a) = 1/a$ ，故切線為 $y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$ ，因其經過點 $(-1, 0)$ ，是以

$$0 - \ln a = \frac{1}{a}(-1 - a),$$

亦即 a 為方程式 $a \ln a - a - 1 = 0$ 之根，令 $f(x) = x \ln x - x - 1$ ，我們將以 Newton 迭代法求 $f(x) = 0$ 之近似根。

$$1^\circ \text{ 令 } g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x \ln x - x - 1}{\ln x} = \frac{x + 1}{\ln x}.$$

2° 令 $x_1 = 4$ ，則

$$x_2 = g(x_1) = 3.60673,$$

$$x_3 = g(x_2) = 3.59115^-,$$

$$x_4 = g(x_3) = 3.59115^-.$$

3° 上述 x_4 四捨五入得 a 之四位小數之近似值為 $s = 3.5911$ 。

4° 驗算：因 $f(3.59105) > 0$ ， $f(3.59115) < 0$ ，故知 a 之第四位小數近似值為 3.5911。

♠ (12-10) 某君於某年元旦起每月初存款 M 元於某銀行，存入 12 次後於翌年元旦領回本利和，假設利息係按月以複利計算。

(a) 設月利率為 r ，試將本利和 A 表為 r 與 M 之函數；

(b) 若 $M = 900$ ， $A = 12,000$ ，試利用 Newton 迭代法以求 r 之近似值至小數第四位。

分析 在華人地區許多人參加「互助會」，例如某甲為某一互助會之會腳，自某年元旦起每個月月初將「活會款」900 元交給「會頭」，交了十二次，某甲乃 12 名「會腳」最後一位，第二年元旦「會頭」將收來的會款（每位「死會」付 1000 元）共計 12,000 元交給某甲，此一情況與 (b) 題相同。

【解】(a) $A = M \sum_{k=1}^{12} (1+r)^k = \frac{M(1+r)((1+r)^{12} - 1)}{(1+r) - 1}.$

(b) 為方便計令 $a = 1 + r$, 則

$$\begin{aligned} A = 12000 &\Leftrightarrow \frac{900a(a^{12} - 1)}{a - 1} = 12000 \\ &\Leftrightarrow 3a^{13} - 3a = 40a - 40 \\ &\Leftrightarrow 3a^{13} - 43a + 40 = 0. \end{aligned}$$

令 $f(a) = 3a^{13} - 43a + 40$, 求 $f(a) = 0$ 之近似根. 因 $f'(a) = 39a^{12} - 43$,

$$g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{3a^{13} - 43a + 40}{39a^{12} - 43},$$

並取 $a_1 = 1.02$, 則

$$a_2 = g(a_1) = 1.016159,$$

$$a_3 = g(a_2) = 1.0161037,$$

$$a_4 = g(a_3) = 1.0161037,$$

令 $s = 1.0161$, 則因 $f(1.01615) > 0$, $f(1.01605) < 0$, 知 s 為 a 之四位小數近似值, 即月利率 r 之四位小數近似值為 $0.0161 = 1.61\%$.

[註]: 這麼高的利率只發生在高通膨的年代.

- ♠ (12-11) 設一平行於 X 軸之直線與 $y = \cosh x$ 相交而得一弦, 試求此弦之長度之近似值至第四位小數, 以使弦之中點 B 與 $y = \cosh x$ 之頂點 A 之距離等於弦長, 亦即 $AB = QP$ (參見右圖).

[註]: 美國密蘇里州的聖路易大拱門 (St. Louis Gateway Arch) 即為一倒立之懸索線, 高與寬皆為 630 呎. 本題解出點 P 之 x 坐標 x_0 後, 先倒立, 再將 x, y 皆予放大 $k = \frac{630}{2 \cdot x_0} = 127.711$ 倍, 最後向上平移, 即可算出拱門函數:

$$g: [-315, 315] \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = k - k \cdot \cosh \frac{x}{k} + 630.$$

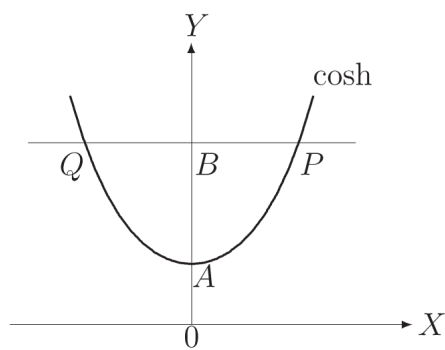


圖 12-4

分析 若設點 P 之坐標為 (x_0, y_0) , 由原設 $y_0 - 1 = 2x_0$, 再設法解出 x_0 .

【解】設點 P 之坐標為 (x_0, y_0) ，由題意知應解方程式 $2x_0 = \cosh x_0 - 1$ ，此方程式不易以邏輯方式解出 a ，令 $f(x) = \cosh x - 2x - 1$ ，我們改以 Newton 迭代法解方程式 $f(x) = 0$ 。因 $f'(x) = \sinh x - 2$ ，故令

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cosh x - 2x - 1}{\sinh x - 2},$$

令 $x_1 = 3$ ，利用計算器或電腦可求得

$$x_2 = g(x_1) = 2.61739$$

$$x_3 = g(x_2) = 2.482005$$

$$x_4 = g(x_3) = 2.466680$$

$$x_5 = g(x_4) = 2.466497$$

$$x_6 = g(x_5) = 2.466497.$$

令 $s = 2.46650$ ，因 $f(2.466495) < 0$ ， $f(2.466505) > 0$ ，故知 x_0 之五位小數近似值為 2.46650 ，即弦長之四位小數近似值為 $2x_0 = 4.9330$ 。

(註： x_0 近似值多取一位小數，以免 $2x_0$ 之末位造成誤差.)

3° 關鍵點：因

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4x}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}, & \text{若 } |x| \neq 2, \\ \text{不存在}, & \text{若 } |x| = 2, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4}{9}(x^2 - 4)^{-4/3}(x^2 - 12), & \text{若 } |x| \neq 2, \\ \text{不存在}, & \text{若 } |x| = 2, \end{cases}$$

知 $Z_{f'} = \{0\}$, $S_f = \{-2, 2\}$, $Z_{f''} = \{\pm 2\sqrt{3}\}$.

4° 漸近線：因 f 於 $\mathbb{R}$ 上為連續，故無垂直漸近線；其次，

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 4)^{2/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x^{3/2}} \right)^{2/3} = +\infty,$$

$x \rightarrow -\infty$ 情形相同，故知 f 圖形之亦無非垂直漸近線。

5° 繪表

x	$-2\sqrt{3}$			-2			0			2			$2\sqrt{3}$		
$f(x)$	+			0			+			0			+		
$f'(x)$	—			+			0			—			+		
$f''(x)$	+	0	—				—						—	0	+
說 明	∪	↘	∩	↗			∩			↘			∪		
	反曲			min			max			min			反曲		

f 於點 -2 及 2 有最小值 0 ，而於點 0 有相對極大值 $16^{1/3}$ 。

f 之圖形之反曲點有二： $(-2\sqrt{3}, f(-2\sqrt{3}))$ 及 $(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3}))$ 。

6° 作圖：

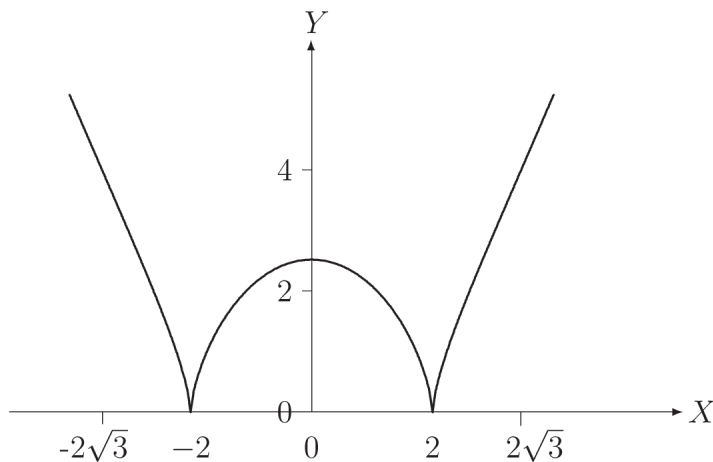


圖 13-1

♠ (13-2) 試討論並作函數 $f(x) = x(x+5)^{2/3}$ 之圖形.

分析 當 $x = -5$ 時, 由於 $(x+5)^{2/3}$ 之指數小於 1, 已說明在點 -5 不為可微.

【解】 1° $D_f = \{x \mid x \cdot (x+5)^{2/3} \text{ 有意義} \} = \mathbb{R}$.

2° f 顯然無對稱性及週期性. 但 f 為連續, 因為 $y = x$ 及 $y = (x+5)^{2/3}$ 二函數皆為連續.

3° 漸近線: 因 f 為連續於 $\mathbb{R}$ 上, 故無垂直漸近線. 至於非垂直漸近線, 因

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5)^{2/3} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5)^{2/3} = -\infty,\end{aligned}$$

知 f 並無非垂直漸近線.

4° f 之一、二階導數分別為

$$\begin{aligned}f'(x) &= \begin{cases} (x+5)^{2/3} + \frac{2}{3}x(x+5)^{-1/3}, & \text{若 } x \neq -5, \\ \text{不存在}, & \text{若 } x = -5, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{5(x+3)}{3(x+5)^{1/3}}, & \text{若 } x \neq -5, \\ \text{不存在}, & \text{若 } x = -5, \end{cases} \\ f''(x) &= \begin{cases} \frac{5}{3} \cdot \frac{(x+5)^{1/3} - \frac{1}{3}(x+3)(x+5)^{-2/3}}{(x+5)^{2/3}}, & \text{若 } x \neq -5, \\ \text{不存在}, & \text{若 } x = -5, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{10}{9} \cdot \frac{x+6}{(x+5)^{4/3}}, & \text{若 } x \neq -5, \\ \text{不存在}, & \text{若 } x = -5, \end{cases}\end{aligned}$$

5° 製表:

x	-6	-5	-3	0
$f(x)$	-	0	-	0
$f'(x)$	+		-	0
$f''(x)$	-	0	+	
說明	↖ ↗	↘ ↗	↖ ↗	↗ ↘
	反曲		max	min

是以 f 在點 -5 有相對極大值 0, 在點 -3 有相對極小值 $-3 \cdot 2^{2/3} = -3\sqrt[3]{4}$.

f 之圖形在點 $(-6, -6)$ 有反曲點.

6° 繪圖:

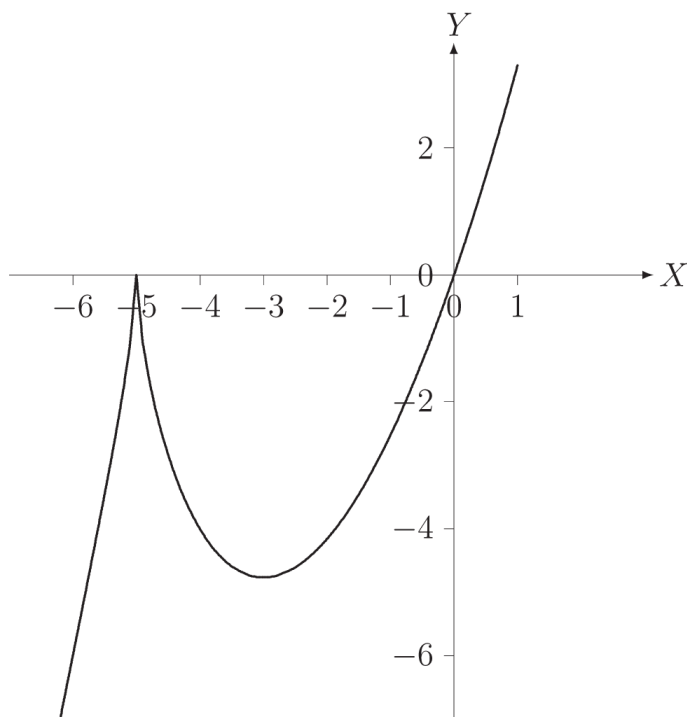


圖 13-2

♠ (13-3) 試討論並列表以繪製 $f(x) = x + \tan^{-1} \frac{x-1}{x+1}$ 之圖形.

分析 解題之前先了解漸近線之公式.

【解】 1° $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

2° 無週期性、無對稱性、但為連續函數.

3° 無垂直漸近線，因 f 在 D_f 上任意點之極限皆為有限，又

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x + \tan^{-1} \frac{x-1}{x+1} = -1 + \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} x + \tan^{-1} \frac{x-1}{x+1} = -1 - \frac{\pi}{2}.$$

而

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\tan^{-1} \frac{x-1}{x+1}}{x} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

知 f 之漸近線為 $y = mx + b = x + \frac{\pi}{4}$, ($x \rightarrow -\infty$ 相同).

4° 由於

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0, \quad \forall x \in D_f,$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

知 $Z_{f'} = \emptyset$, $Z_{f''} = \{0\}$.

5° 製表：

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+		
$f''(x)$	+	+	0	-	
說明	↗)	↗)	↗) 反曲	↘ (	

由上表知， f 無極值，但點 $(0, -\frac{\pi}{4})$ 為其圖形之反曲點。

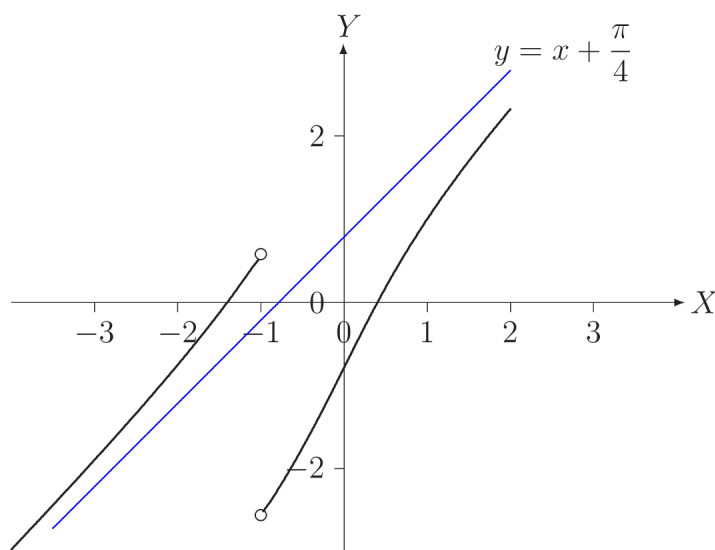
6° f 之圖形如下：

圖 13-3

♠ (13-4) 設 $f(x) = (2x^2 - x^3)^{1/3}$.

- (a) 試求 f 之導函數；
- (b) 試求 f 之極值；
- (c) 試求 f 之圖形的漸近線。

分析 尋求某函數之漸近線往往是「作圖題」的重點。

【解】 (a) 若 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - x^3)^{-2/3}(4x - 3x^2) = \frac{4 - 3x}{3x^{1/3}(2 - x)^{2/3}};$$

若 $x = 0$ ，則因

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - 3x}{3x^{1/3}(2 - x)^{2/3}} = +\infty,$$

知 f 在點 0 不為可微.

若 $x = 2$, 則因

$$\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 3x}{3x^{1/3}(2 - x)^{2/3}} = -\infty,$$

知 f 在點 2 不為可微. 綜合以上三點知 f 之導函數為

$$f': \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) = \frac{4 - 3x}{3x^{1/3}(2 - x)^{2/3}}.$$

(b) 首先, 因

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 3x}{3x^{1/3}(2 - x)^{2/3}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3},$$

故知 f 之臨界點集為 $Z_{f'} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f = \{0, \frac{4}{3}, 2\}$, 繪表如下:

x	0	$\frac{4}{3}$	2
$f'(x)$	-	+ 0 -	-
說 明	$\searrow$ min	$\nearrow$ max	$\searrow$

知 f 在點 0 有相對極小, 而在點 $\frac{4}{3}$ 有相對極大, 但無絕對極值.

(c) 因 f 連續於 $\mathbb{R}$ 上, 故 f 之圖形無垂直漸近線. 其次,

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - x^3)^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right)^{1/3} = -1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((2x^2 - x^3)^{1/3} + x\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{1/3} + 1\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2t - 1)^{1/3} + 1}{t}, \quad (\text{令 } t = 1/x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{3}(2t - 1)^{-2/3}, \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故 $y = mx + b = -x + \frac{2}{3}$, 為其非垂直漸近線, ($x \rightarrow -\infty$ 結果相同).

註: 本題並未要求繪出圖形.

♠ (13-5) 設 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$. 試求 a 與 b 之值.

分析 利用作圖概念.

【解】由題意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$ ，知 $y = ax + b$ 乃 f 圖形之非垂直漸近線，故

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = 1. \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

♠ (13-6) 試繪製曲線 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

【分析】作圖題是一種程序性題目，意思是只需按照程序一步步做下去就可以，可能有點繁，但不會太難。

【解】令 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

1° $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2° f 無週期性及對稱性，但為連續。

3° 漸近線： $x = 1$ 顯為其垂直漸近線。至於非垂直漸近線，由於

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2, \end{aligned}$$

是以 $y = x + 2$ ，為一非垂直漸近線。 $(x \rightarrow -\infty)$ 亦同。

4° 次求 f 之一、二階導數， $\forall x \in D_f$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \\ f''(x) &= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3x^2(x-3)(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}, \end{aligned}$$

$$Z_{f'} = \{0, 3\}, \quad Z_{f''} = \{0\}.$$

5° 繪表：

x	0			1	3		
$f(x)$	-	0	+		+		
$f'(x)$	+	0	+		-	0	+
$f''(x)$	-	0	+			+	
說明	↗		↗		↘	min	↗
	∪	反曲	∪			∪	

6° 圖形如下：

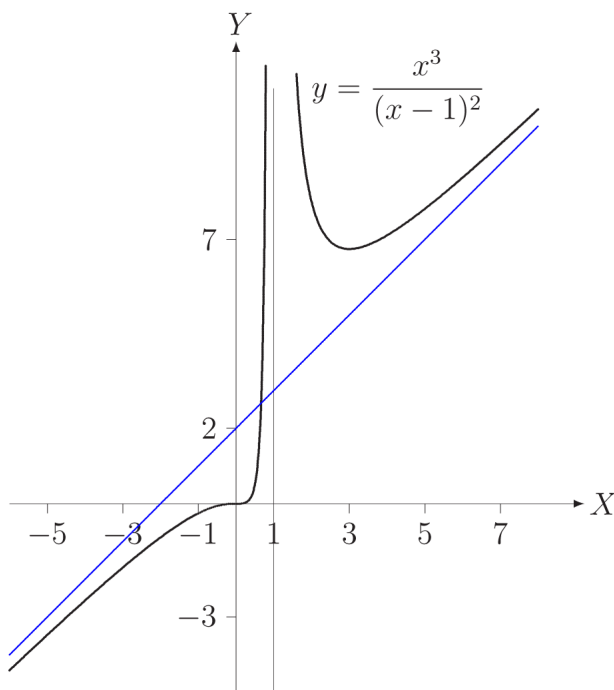


圖 13-4

♠ (13-7) 設 $f(x) = x \tan^{-1} x$.

- 討論 f 之對稱性；
- 試求 f 之漸近線，（若其存在）；
- 試繪表以求 f 之極值及反曲點，（若其存在）；
- 綜合以上各點繪出 f 之圖形。

分析 非垂直漸近線應注意是否有兩條，換言之應討論 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 二種情形。

【解】(a) 由於

$$f(-x) = -x \tan^{-1}(-x) = x \tan^{-1} x = f(x),$$

知 f 之圖形對稱於 Y 軸。

(b) 首先，因 f 於 $\mathbb{R}$ 上為連續，故無垂直漸近線

其次，因

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

知 f 之非垂直漸近線為 $y = mx + b = \frac{\pi x}{2} - 1$.

同理, $x \rightarrow -\infty$ 時, 另一條非垂直漸近線為 $y = -\frac{\pi x}{2} - 1$.

(c) 先求 f 之一、二階導數,

$$f'(x) = \tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2},$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0.$$

由 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 知 f 只有唯一臨界點 0, 繪表如下:

x	0		
$f(x)$	+	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+		
說 明	$\searrow$	min ⌒	$\nearrow$

知 f 在點 0 有最小值, 但 f 之圖形無反曲點.

(d) 作圖:

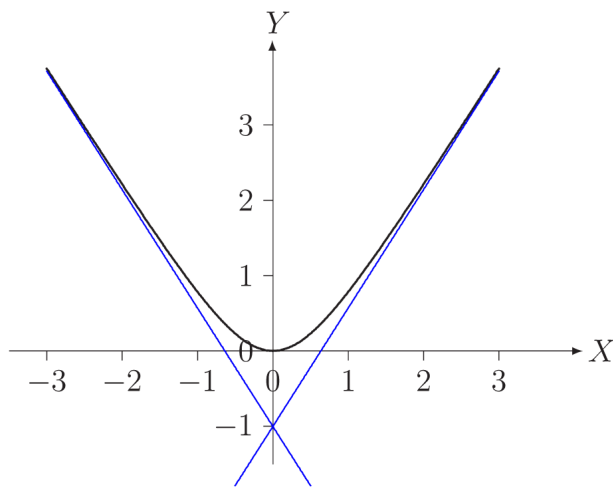


圖 13-5 藍色線為漸近線

♠ (13-8) 設 $y = mx + b$ 為函數 f 之圖形之一非垂直漸近線, k 為一非零常數.

試證: $\lim_{x \rightarrow p} (f(x+k) - f(x))$ 存在; 並求此極限, 內 p 為 $+\infty$ 或 $-\infty$.

分析

本題需要「非垂直漸近線」之定義, 而定義往往被許多人忽略.

【解】 只證 $p = +\infty$ 之情形: 由原設 $y = mx + b$ 為 f 之一非垂直漸近線知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - b) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+k) - m(x+k) - b) = 0 \quad (2)$$

是以

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+k) - f(x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(x+k) - m(x+k) - b) - (f(x) - mx - b) + mk] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+k) - m(x+k) - b) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - b) + mk \\
 &= mk.
 \end{aligned}$$

♠ (13-9) 設 f 在區間 I 上為一凸函數，試證：若 $x_1, \dots, x_n$ 為 $\overset{\circ}{I}$ 內相異元素，則

$$\frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n)) > f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right). \quad (*)$$

分析 $\overset{\circ}{I}$ 表區間 I 之內部，換言之，若 $I = [a, b]$ (或 $(a, b]$)，則 $\overset{\circ}{I} = (a, b)$ 。本題屬於理論之探討，希望對於喜愛邏輯推演的讀者有所幫助。

【解】 由原設 $x_1, \dots, x_n$ 為 I 內相異元素，故知 $n \geq 2$ ，我們將利用數學歸納法證明之。

1° 若 $n = 2$ ，則由凸函數之定義顯然有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)).$$

2° 若 $n = k$ 時，不等式 $(*)$ 為真，即

$$\frac{1}{k}(f(x_1) + \dots + f(x_k)) > f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right).$$

往證：若 $n = k + 1$ 時，不等式 $(*)$ 亦為真。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k+1}(f(x_1) + \dots + f(x_{k+1})) &= \frac{1}{k+1}(f(x_1) + \dots + f(x_k) + f(x_{k+1})) \\
 &= \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k}(f(x_1) + \dots + f(x_k)) + \frac{1}{k+1}f(x_{k+1}) \\
 &> \frac{k}{k+1} \cdot f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right) + \frac{1}{k+1}f(x_{k+1}) \\
 &\geq f\left(\frac{k}{k+1} \cdot \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} + \frac{1}{k+1}x_{k+1}\right), \\
 &\quad \left(\text{注意：}\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \text{ 可能等於 } x_{k+1}\right) \\
 &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{k+1}}{k+1}\right).
 \end{aligned}$$

♠ (13-10) 試證： $\forall a > 0, \forall x \in [0, 1], a^x \leq 1 + (a - 1)x$.

[提示] 利用凸函數性質.

分析 大部分讀者並不留意凸函數 (convex function) 之定義，僅了解當 $f''(x) > 0$ 時，函數之圖形為凹向上，當然難以解出本題.

【解】 $a = 1$ 時，不等式顯然為真，以下只證 $a \neq 1$ 之情形.

設 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = a^x$ ，則因

$$f'(x) = (\ln a)a^x,$$

$$f''(x) = (\ln a)^2 a^x > 0,$$

知 f 為一凸函數，由凸函數之定義知，連接點 $(0, 1)$ 及 $(1, a)$ 之割線

$$h: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}: h(x) = 1 + (a - 1)x$$

必在 f 圖形之上，即 $\forall x \in (0, 1), h(x) = 1 + (a - 1)x > f(x) = a^x$. 當 $x \in \{0, 1\}$ ，顯然 $a^x = 1 + (a - 1)x$. (以下僅繪製 $a < 1$ 情形， $a > 1$ 情形相似，留給讀者自行繪製.)

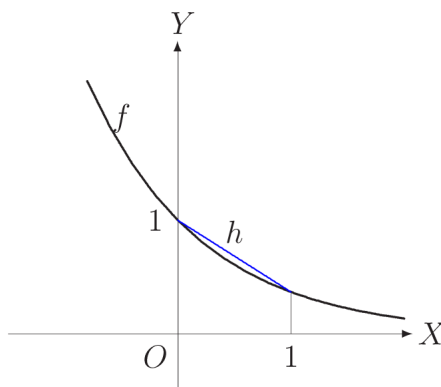


圖 13-6

【解】1° 若 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, 令 $u = \ln x$, $dv = x^n dx$, 則 $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$\text{原題} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

2° 若 $n = -1$,

$$\text{原題} = \int x^{-1} \ln x dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

♠ (14-3) 試求不定積分 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$.

【分析】三角代換題目通常不會太難，但有個小麻煩，將新變數 θ 換回舊變數時，有時會有符號上的問題，若有不明白之處，敬請參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第五章 §5.4.

【解】 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}} dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}} dx - \int \frac{3}{\sqrt{x^2+2x}} dx$, 令

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}} dx = \int (x^2+2x)^{-1/2} d(x^2+2x) \\ &= 2(x^2+2x)^{1/2} + C_1. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{3}{\sqrt{x^2+2x}} dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}, \quad (\text{以下詳解之.})$$

先令 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$, 顯然 $D_f = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, 然不定積分之被積

函數的定義域須為區間，取 $(-\infty, -2)$ 或 $(0, +\infty)$, (但定義域不可採取二者之聯集).

1° 若 $x \in (0, +\infty)$, 令 $x+1 = \sec \theta$, 則 $dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$, 而

$$\theta = \sec^{-1}(x+1) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 3 \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}} \\ &= 3 \int \sec \theta d\theta, \quad (\text{注意：上式被積函數之分母為正}) \\ &= 3 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_2 \\ &= 3 \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x}| + C_2. \end{aligned}$$

2° 若定義域為 $(-\infty, -2)$, 令 $x+1 = \sec \theta$, 則 $dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$, 而 $\theta = \sec^{-1}(x+1) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

$$\begin{aligned} I_2 &= 3 \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}} \\ &= -3 \int \sec \theta d\theta, \quad (\text{注意: } \sec \theta < 0) \\ &= -3 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C'_2 \\ &= -3 \ln |x+1 - \sqrt{x^2+2x}| + C'_2 \\ &= 3 \ln \left| \frac{1}{x+1 - \sqrt{x^2+2x}} \right| + C'_2 \\ &= 3 \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x}| + C'_2, \quad (\text{有理化分母}). \end{aligned}$$

因此,

$$\text{原題} = I_1 - I_2 = 2\sqrt{x^2+2x} - 3 \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x}| + C.$$

♠ (14-4) 試求 $\int \csc^{2n+1} x dx$ 之簡化公式 (reduction formula), 內 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

分析 簡化公式一旦求得, 吾人可以連續套用, 最後不定積分部分只有 $\int \csc x dx$.

【解】 令 $u = \csc^{2n-1} x dx$, $dv = \csc^2 x dx$, 則 $du = -(2n-1) \csc^{2n-1} x \cot x dx$, $v = -\cot x$,

$$\begin{aligned} \int \csc^{2n+1} x dx &= -\csc^{2n-1} x \cot x - (2n-1) \int \cot^2 x \csc^{2n-1} x dx \\ &= -\csc^{2n-1} x \cot x - (2n-1) \int (\csc^2 x - 1) \csc^{2n-1} x dx \\ &= -\csc^{2n-1} x \cot x - (2n-1) \int \csc^{2n+1} x dx \\ &\quad + (2n-1) \int \csc^{2n-1} x dx. \end{aligned}$$

左右兩端分別加以 $(2n-1) \int \csc^{2n+1} x dx$, 得簡化公式

$$\int \csc^{2n+1} x dx = -\frac{1}{2n} \csc^{2n-1} x \cot x + \frac{2n-1}{2n} \int \csc^{2n-1} x dx.$$

♠ (14-5) 試求以下各不定積分：

$$(a) \int \sin^{-1} x \, dx;$$

$$(b) \int \cos^{-1} x \, dx;$$

$$(c) \int \tan^{-1} x \, dx;$$

$$(d) \int \cot^{-1} x \, dx;$$

$$(e) \int \sec^{-1} x \, dx;$$

$$(f) \int \csc^{-1} x \, dx.$$

分析

解題方法皆為「分部積分法」(by parts)，但難易稍有差別。

【解】(a) 令 $u = \sin^{-1} x$, $dv = dx$, 則 $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$,

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

(b) 令 $u = \cos^{-1} x$, $dv = dx$, 則 $du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$,

$$\int \cos^{-1} x \, dx = x \cos^{-1} x + \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

(c) 令 $u = \tan^{-1} x$, $dv = dx$, 則 $du = \frac{dx}{x^2+1}$, $v = x$.

$$\begin{aligned} \int \tan^{-1} x \, dx &= x \tan^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{x^2+1} = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

(d) 令 $u = \cot^{-1} x$, $dv = dx$, 則 $du = -\frac{dx}{x^2+1}$, $v = x$.

$$\begin{aligned} \int \cot^{-1} x \, dx &= x \cot^{-1} x + \int \frac{x \, dx}{x^2+1} = x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

(e) 若 $x > 1$, 令 $u = \sec^{-1} x$, $dv = dx$, 則 $du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $v = x$,

$$\int \sec^{-1} x \, dx = x \sec^{-1} x - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = x \sec^{-1} x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C.$$

【註】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$ 係利用三角代換法，見 (14-3) 題。

若 $x < -1$, 令 $u = \sec^{-1} x$, $dv = dx$, 則 $du = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $v = x$,

$$\int \sec^{-1} x \, dx = x \sec^{-1} x + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = x \sec^{-1} x + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C.$$

(f) 仿 (e) 讀者自證之。

♠ (14-6) 試以二種不同方法求不定積分 $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ 。

分析 方法之一是半角代換，另一則是利用三角函數公式將分母合併為單一三角函數。

【解】 法一：利用半角代換法。令 $u = \tan \frac{x}{2}$ ，則 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ ， $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ，
 $dx = \frac{2 du}{1+u^2}$ ，是以

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int \frac{\frac{2 du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2 du}{2u + 1 - u^2} \\ &= -2 \int \frac{du}{u^2 - 2u + 1 - 2} = -2 \int \frac{du}{(u-1)^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= -\sqrt{2} \int \frac{dt}{t^2 - 1}, \quad (\text{令 } t = \frac{u-1}{\sqrt{2}}) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\frac{u-1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{u-1}{\sqrt{2}} + 1} \right| + C \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}} + 1} \right| + C \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

法二：

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int \frac{a}{a \sin x + a \cos x} dx, \quad (\text{令 } a = \sqrt{2}/2) \\ &= a \int \frac{1}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} dx \\ &= a \int \sec(x - \frac{\pi}{4}) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \sec(x - \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) \right| + C. \end{aligned}$$

上述二法之結果看上去並不完全一致，讀者只需花點時間即可證明二者並無不同。

♠ (14-7) 試求不定積分 $\int x^2 \sin^2 x \, dx$.

分析 先將 $\sin^2 x$ 化爲倍角型式，再利用分部積分法 (by parts) 時會比較方便.

【解】 利用分部積分法：

$$\begin{aligned}
 \text{原題} &= \frac{1}{2} \int x^2 (1 - \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x \, dx \\
 &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \sin 2x}{4} + \frac{1}{2} \int x \sin 2x \, dx, \quad \left(\text{令 } u = x^2, \, dv = \cos 2x \, dx \right) \\
 &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \sin 2x}{4} + \frac{1}{2} \left(-\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) + C \\
 &\qquad\qquad\qquad \left(\text{令 } u_1 = x, \, dv_1 = \sin 2x \, dx \right) \\
 &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C.
 \end{aligned}$$

♠ (14-8) 試求不定積分 $\int \frac{dx}{a + b \cdot \tan x}$ ，其中 $ab \neq 0$.

分析 本題有數種解法，說明不定積分的多樣性，除以下三種方法之外當然還有半角代換法，這一部分我們留給有興趣的讀者.

【解】 法一：

$$\begin{aligned}
 \text{原題} &= \int \frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x} \, dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{\cos x}{\cos(x - \alpha)} \, dx, \\
 &\qquad\qquad\qquad \left(\text{內 } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{\cos(\alpha + (x - \alpha))}{\cos(x - \alpha)} \, dx \\
 &= \frac{\cos \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int dx - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \tan(x - \alpha) \, dx \\
 &= \frac{ax}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} \ln |\cos(x - \alpha)| + C \\
 &= \frac{ax}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} \ln |a \cos x + b \sin x| + C'.
 \end{aligned}$$

法二：令 $u = \tan x$ ，則

$$du = \sec^2 x dx = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + u^2) dx, \quad dx = \frac{du}{1 + u^2},$$

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int \frac{du}{(a + bu)(1 + u^2)} \\ &= \frac{b^2}{a^2 + b^2} \int \frac{du}{a + bu} + \frac{1}{a^2 + b^2} \int \frac{a - bu}{1 + u^2} du, \quad (\text{部分分式}) \\ &= \frac{b}{a^2 + b^2} \ln |a + bu| - \frac{b}{2(a^2 + b^2)} \ln(1 + u^2) + \frac{a \tan^{-1} u}{a^2 + b^2} + C \\ &= \frac{b}{a^2 + b^2} \ln |a + b \tan x| - \frac{b}{2(a^2 + b^2)} \ln(1 + \tan^2 x) + \frac{ax}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}$$

法三：

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \frac{1}{a^2 + b^2} \int \frac{(a^2 + b^2) \cos x}{a \cos x + b \sin x} dx \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \int \frac{a^2 \cos x + ab \sin x - ab \sin x + b^2 \cos x}{a \cos x + b \sin x} dx \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} \int \frac{a \cos x + b \sin x}{a \cos x + b \sin x} dx + b \int \frac{-a \sin x + b \cos x}{a \cos x + b \sin x} dx \\ &= \frac{ax}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} \ln |a \cos x + b \sin x| + C. \end{aligned}$$

♠ (14-9) 試求不定積分 $\int \max\{2 - x, x^3\} dx$.

分析 很少不定積分問題需要動用「微積分基本定理」，若遇到被積函數含有 $\max$ 、 $\min$ 、 $|\cdot|$ (絕對值符號)，我們就需要它。有人以為本題可以這麼解：

- 若 $x \leq 1$ ， $\max\{2 - x, x^3\} = 2 - x$ ，則

$$\int \max\{2 - x, x^3\} dx = \int (2 - x) dx = 2x - \frac{x^2}{2} + C,$$

- 若 $x > 1$ ， $\max\{2 - x, x^3\} = x^3$ ，則

$$\int \max\{2 - x, x^3\} = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

依題意，我們應求出一函數 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足 $F'(x) = \max\{2 - x, x^3\}$ ，上述結果呈現兩個函數，完全不符合要求。

【解】 1° 先求 $y = 2 - x$ 與 $y = x^3$ 二曲線之交點，

$$x^3 - (2 - x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

知 $y = x^3$ 與 $y = 2 - x$ 二曲線相交於點 $(1, 1)$ 。

2° 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \max\{2-x, x^3\} = \begin{cases} 2-x, & \text{若 } x \leq 1, \\ x^3, & \text{若 } x > 1, \end{cases}$ 若令

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : F(x) = \int_1^x f(t) dt = \begin{cases} 2t - \frac{t^2}{2} \Big|_1^x, & \text{若 } x \leq 1, \\ \frac{t^4}{4} \Big|_1^x, & \text{若 } x > 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}, & \text{若 } x \leq 1, \\ \frac{x^4 - 1}{4}, & \text{若 } x > 1, \end{cases}$$

則由微積分基本定理知 $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$, 是以

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

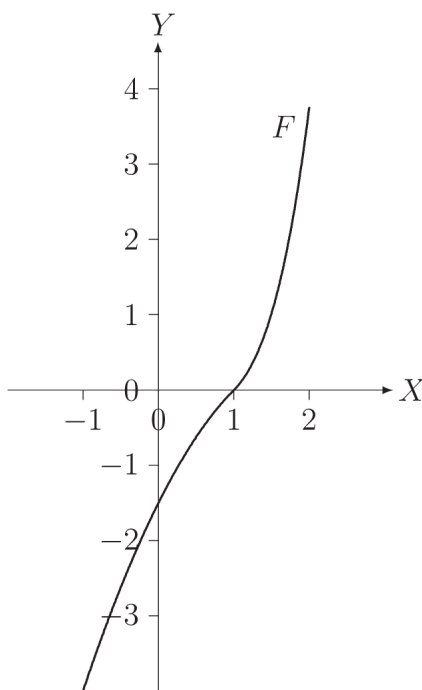


圖 14-1

♠ (14-10) 試求不定積分 $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

分析 本題解題的關鍵在於分解 $x^4 + 1$, 一旦能分解為兩個二次多項式之積, 下一步可用部分分式法解決.

【解】由於

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

我們將被積函數化為部分分式：

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

是以

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |x^2 + \sqrt{2}x + 1| + \frac{\sqrt{2}}{4} \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |x^2 - \sqrt{2}x + 1| + \frac{\sqrt{2}}{4} \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) + C. \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) + C. \end{aligned}$$

♠ (14-11) 試求 $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$, 內 $a > 0$.

【分析】這是不定積分的名題之一，有兩種解法：雙曲代換法及三角代換法。

【解】法一：雙曲代換法，令 $x = a \sinh t$, (注意：應為 $t = \sinh^{-1} \frac{x}{a}$)，則

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} a \cosh t dt \\ &= a^2 \int \cosh^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (\cosh 2t + 1) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sinh 2t + t \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} (\sinh t \cosh t + t) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \sinh^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C', \quad [*] \end{aligned}$$

[*] 我們知 $\forall x \in \mathbb{R}, \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

法二：三角代換法，令 $x = a \tan t$ ，（注意：應為 $t = \tan^{-1} \frac{x}{a} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ），則
 $dx = a \sec^2 t dt$.

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int \sqrt{a^2(\tan^2 t + 1)} a \sec^2 t dt \\ &= a^2 \int \sec^3 t dt, \quad (\text{注意：} \sec t > 0) \\ &= \frac{a^2}{2} (\sec t \tan t + \ln |\sec t + \tan t|) + C, \quad (\text{by parts}) \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \cdot \frac{x}{a} + \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right) \right) + C, \quad (\text{見下面 } \star) \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C'. \end{aligned}$$

$$(\star) \quad \sec t = \sqrt{1 + \tan^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}.$$

♠ (14-12) 試證：最大整數函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = [x]$ 不具反導函數 (anti-derivative)，
 （因此，其不定積分 $\int [x] dx$ 不存在。）

分析 雖然 $\int [x] dx$ 不存在，並不代表我們不能求 $\int_0^{\sqrt{3}} [x] dx$ ，下一節我們再來研究。

【證】 假定 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為 f 之一反導函數，因

$$F'(0) = f(0) = 0 < 0.5 < 1 = f(1) = F'(1),$$

由導函數介值定理[†]知，存在 $t \in (0, 1)$ 使得 $F'(t) = f(t) = 0.5$ ，顯然不可能，故知 f 不具反導函數。

♠ (14-13) 設 $f''(x) = (x + 4) \exp\left(\frac{x-1}{2}\right)$ ， $f'(1) = 10$ 。

(a) 試問 f 在何處凹向上，在何處凹向下？

(b) 試問 f 在何處為遞增，在何處為遞減？

分析 本題未必需要求出函數 f ，但必須先求出 f' 方能判別函數之增減，因此必須利用不定積分，由 f'' 求出 f' 。

[†] 拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第二章定理 2.19。

【解】(a) 由於

$$f''(x) = (x+4) \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) \begin{cases} < 0, & \text{若 } x < -4, \\ = 0, & \text{若 } x = -4, \\ > 0, & \text{若 } x > -4, \end{cases}$$

故知 f 在區間 $(-\infty, -4]$ 為凹向下，而於 $[-4, +\infty)$ 為凹向上。

(b) 1° 先求 $f'(x)$ 。由於

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x) dx = \int (x+4) \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) dx \\ &= 2(x+4) \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) - 2 \int \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) dx \\ &\quad \left(\text{令 } u = x+4, \quad dv = \exp\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) \\ &= (2x+4) \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) + C, \end{aligned}$$

其中常數 C 應滿足 $f'(1) = 10$ ，顯然 $C = 4$ ，故

$$f'(x) = (2x+4) \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4.$$

2° 由 (a) 知 f' 在點 -4 有最小值，亦即 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) \geq f'(-4) = 4(1 - e^{-5/2}) > 0,$$

故知 f 在 $\mathbb{R}$ 上為遞增。

對於分割 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 顯然 $M(I_k) = 1$, $m(I_k) = -1$, 故

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^n M(I_k) \Delta x_k = 1,$$

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m(I_k) \Delta x_k = -1.$$

是以

$$\int_0^1 f = \inf \{U(f, P) \mid P \text{ 爲 } I \text{ 之分割}\} = 1,$$

$$\int_0^1 f = \sup \{L(f, P) \mid P \text{ 爲 } I \text{ 之分割}\} = -1.$$

$$\text{故 } \int_0^1 f = 1 > 0 > -1 = \int_0^1 f.$$

♠ (15-2) 設 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{否則.} \end{cases}$

(a) 設 P_n 爲區間 $[0, 1]$ 之正則分割[†], $T_n = \{1/n, 2/n, \dots, 1\}$,

$$S(f, P_n, T_n) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}, \quad (\text{Riemann sum of } f),$$

試求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, P_n, T_n) = ?$

(b) $\int_0^1 f(x) dx = ?$

分析 在拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第六章 6.7 定理中證明了：

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow +\infty} U(f, P_n), \quad \int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(f, P_n).$$

我們將利用此二公式以證明 f 於 $[0, 1]$ 上不爲可積。

【解】(a) 此 Riemann sum 之極限爲

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, P_n, T_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}, \quad (\because t_k = k/n \text{ 爲有理數}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

[†] 正則分割 (regular partition) 係指 n 等分之分割。

(b) 設 $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$ 為 $[0, 1]$ 上一正則分割, 則 $\forall k = 1, \dots, n$,

- $M(I_k) = \sup \left\{ x \mid x \in \mathbb{Q}, \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n} \right\} = \frac{k}{n};$
- $m(I_k) = \inf \left\{ -x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n} \right\} = -\frac{k}{n}.$

是以上積分爲

$$\begin{aligned} \int_0^1 f &= \lim_{n \rightarrow +\infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

同理下積分爲 $\int_0^1 f = -\frac{1}{2}$, 故知 f 於 $[0, 1]$ 上不爲可積。

註：本題說明「Riemann sum 之極限存在」不等於「 f 爲 Riemann 可積」。

♠ (15-3) 試求 $\int_n^{n+1} [x] dx = ?$ 內 $n \in \mathbb{N}$, $[\cdot]$ 爲最大整數函數。

分析 可能有人一眼就看出答案爲 n , 然而數學需要的不僅僅是答案, 而是需要由定義或定理演繹而得結果之「過程」。本題我們需要以下定理[‡]:

設 P_n 爲 $[a, b]$ 上一正則分割, 若 f 在 I 上爲 Riemann 可積, 則

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, P_n, T_n),$$

內 $S(f, P_n, T_n) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$, $T_n = \{t_1, \dots, t_n\}$, 其中 $t_k \in I_k$ 爲一固定之點。

【解】 令 $f: [n, n+1] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = [x]$, 區間 $[n, n+1]$ 上之一正則分割

$$P_m = \left\{ n, n + \frac{1}{m}, n + \frac{2}{m}, \dots, n + 1 \right\}; T_m = \left\{ n, n + \frac{1}{m}, n + \frac{2}{m}, \dots, n + \frac{m-1}{m} \right\},$$

因 f 爲單調, 故爲可積, 是以

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} [x] dx &= \lim_{m \rightarrow +\infty} S(f, P_m, T_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m f(t_k) \cdot \frac{1}{m}, \quad (\text{參閱圖 15-1}) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \frac{n}{m}, \quad (\because f(t_k) = n, \forall k) \\ &= n. \end{aligned}$$

[‡] 拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第六章 6.7 定理。

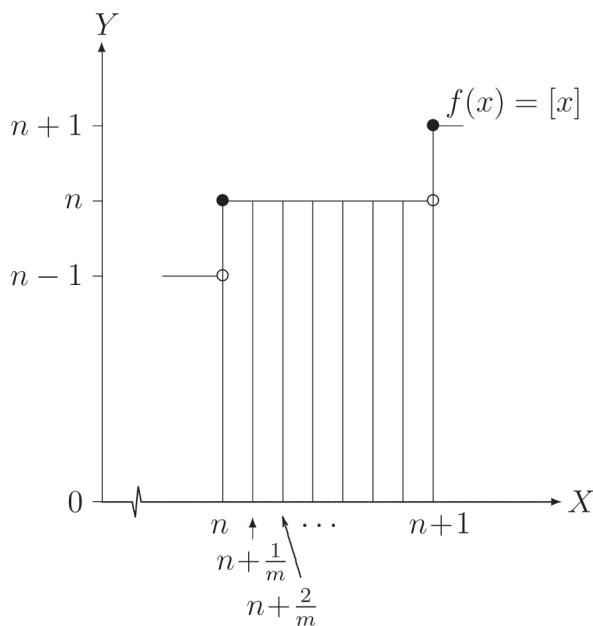


圖 15-1 (注意：X 軸與 Y 軸單位不相等)

♠ (15-4) 設 $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x$, P_n 為 $[0, 2]$ 上一正則分割, 試問哪些 n 值可使 $U(f, P_n) - L(f, P_n) < 0.001$.

分析 我們知道：函數 f 在區間 $[a, b]$ 上為可積之充要條件為 f 滿足如下之 **Riemann** 條件 (Riemann condition):

$$\forall \epsilon > 0, \exists P \text{ 使得 } U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

【解】令 $P_n = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, \frac{2n}{n}\right\}$ (區間 $[0, 2]$ 之正則分割), 則

$$M(I_k) = \frac{2k}{n}, \quad m(I_k) = \frac{2(k-1)}{n},$$

$$U(f, P_n) = \sum_{k=1}^n M(I_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n k,$$

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^n m(I_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{2(k-1)}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1),$$

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}.$$

是以

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) < 0.001 \Leftrightarrow \frac{4}{n} < 0.001$$

$$\Leftrightarrow n > 4000$$

$$\Leftrightarrow n \geq 4001,$$

換言之，當區間 $[0, 2]$ 被分割為 4001 等分以上時，可使上、下和數之差小於 0.001.

♠ (15-5) 試求 $\int_0^2 \min\{3x, 4 - x^2\} dx = ?$

分析 本題之解法有兩種，其一，先解出不定積分，再求定積分；其二，先求 $y = 3x$ 及 $y = 4 - x^2$ 之交點的 x 坐標，再將積分分為二段，後者較為簡單。

【解】 先求 $y = 3x$ 及 $4 - x^2$ 之交點，由於

$$3x = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, 1\},$$

是以被積函數

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \min\{3x, 4 - x^2\} = \begin{cases} 3x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - x^2, & \text{若 } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 3x dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{3}{2} + \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

♠ (15-6) 試證： $1 < \int_0^1 (1+x)^x dx < \frac{3}{2}$.

分析 在 Riemann 積分中有關保序性之定理如下：

若 f, g 在區間 $[a, b]$ 上均為可積且 $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ ，則

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

上述定理中之「 $\leq$ 」改為「 $<$ 」也成立。此外提醒讀者： $(1+x)^x = \exp(x \ln(1+x))$ 。

【證】 利用積分之保序性。

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow 0 < x \ln(1+x) < \ln(1+x) \\ &\Rightarrow \exp 0 < \exp(x \ln(1+x)) < \exp(\ln(1+x)), \quad (\because \exp \text{ 爲遞增}) \\ &\Rightarrow 1 < (1+x)^x < 1+x \\ &\Rightarrow \int_0^1 dx < \int_0^1 (1+x)^x dx < \int_0^1 (1+x) dx \\ &\Rightarrow 1 < \int_0^1 (1+x)^x dx < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

♠ (15-7) 試求積分 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.

分析 使用三角代換時，應注意變換前後之符號。

【解】 先求不定積分，

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 1}} \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad (\text{令 } t = x + 2) \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}}, \quad (\text{令 } t = \tan \theta, \quad \theta = \tan^{-1} t) \\ &= \int \sec \theta d\theta, \quad (\text{因 } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}) \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C = \ln |\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x + 2| + C. \end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} &= \ln |\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x + 2| \Big|_0^{1/2} \\ &= \ln \frac{5 + \sqrt{29}}{2} - \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

♠ (15-8) 設 $f(\pi) = 2$ ，且 $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sin x dx = 5$ ，試求 $f(0)$ 。

分析 針對不定積分 $\int f(x) \sin x dx$ 做二次 by parts，即可發現答案就在眼前。

【解】 利用分部積分法，令 $u = f(x)$ ， $dv = \sin x dx$ ，則

$$\begin{aligned} \int f(x) \sin x dx &= -f(x) \cos x + \int f'(x) \cos x dx \\ &= -f(x) \cos x + \left(f'(x) \sin x - \int f''(x) \sin x dx \right) \\ &\quad (\text{第二項再一次 by parts}) \end{aligned}$$

故

$$\int (f(x) + f''(x)) \sin x dx = -f(x) \cos x + f'(x) \sin x + C.$$

是以

$$5 = \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sin x dx = -f(x) \cos x + f'(x) \sin x \Big|_0^\pi = f(\pi) + f(0),$$

已知 $f(\pi) = 2$, 故知 $f(0) = 5 - f(\pi) = 3$.

♠ (15-9) 試證：

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

分析 不定積分之簡化公式在本題有很好的示範功能. 在本書第 21 單元, 我們需證原題右端之極限為 0 (當 $n \rightarrow +\infty$), 方法有好幾種, 其中之一就是利用本題之結論.

【解】 1° 先求 $\int \sin^n x \, dx$ 之簡化公式, 令 $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x \, dx$, 則
 $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx$, $v = -\cos x$,

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x)(1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx \end{aligned}$$

左右兩端分別加上 $(n-1) \int \sin^n x \, dx$, 得

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

2° 是以

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx &= \left[-\frac{\sin^{2n} x \cos x}{2n+1} \right]_0^{\pi/2} + \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx \\ &= 0 + \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-3} x \, dx \\ &= \cdots \\ &= \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}. \end{aligned}$$

• Riemann sum 之極限

♠ (15-10) 試求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k^2 + n^2}}{n^2} = ?$

分析 可能有人以為：由於

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k^2 + n^2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = 0,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k^2 + n^2}}{n^2} = \sum_{k=1}^n \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k^2 + n^2}}{n^2} = 0.$$

這是錯的，理由是原題內之極限內之項數並非固定，而是隨著 n 而變大。

本題宜先將極限內之部分，化為 Riemann sum，再找出合用之函數 f 。則由定理知：若 f 為 Riemann 可積，則

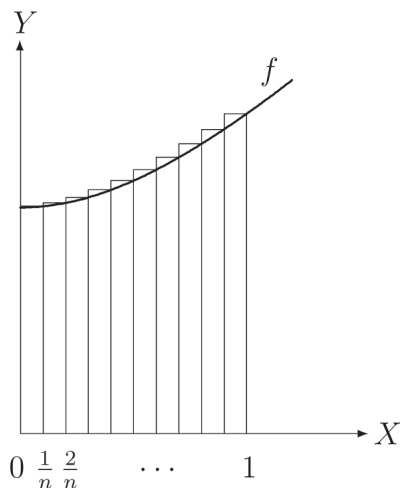
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, P_n, T_n).$$

其中 P_n 為 $[a, b]$ 上一正則分割， T_n 為一固定之取點集合。（若 f 不為 Riemann 可積，上述公式不真，參見 15-2 題。）最後利用定積分方法解出積分值。

【解】參閱圖 15-2。

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, P_n, T_n), \quad \left(\text{令 } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \sqrt{1 + x^2}, \right. \\ &\quad \left. P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}, \quad T_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}. \right) \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx, \quad (\because f \text{ 為連續, 故為可積.}) \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \sinh^{-1} x \Big|_0^1, \quad (\text{雙曲代換 } x = \sinh t, \text{ 詳見 14-11 題.}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \sinh^{-1} 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

註： $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

圖 15-2 條圖面積和為 $S(f, P_n, T_n)$

♠ (15-11) 試求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = ?$

分析 很多人以為本題和上題一樣， n 項和之極限應為 Riemann sum 問題，可用積分來解決，事實不然，括號內之 n 項和無法化為 Riemann sum.

【解】 由於

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq n &\Rightarrow n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + n \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \\ &\Rightarrow 1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}. \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1,$$

是以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$

♠ (15-12) 試求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = ?$

分析 本題看上去和 Riemann 積分無關，解題關鍵在於「取對數」。由於 $\exp$ 和 $\ln$ 互為反函數，亦即 $\forall x > 0$ ， $\exp(\ln x) = x$ ；我們若能求得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)$ ，本題即可解決。

【解】令 $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $b_n = \ln a_n = \ln\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n}\right)^{1/n}$, 由於

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} \\ &= \int_{0+}^1 \ln x \, dx = \lim_{t \rightarrow 0+} \left[x \ln x - x \right]_t^1 \\ &= -1 + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = -1, \quad (\text{l'Hospital 規則})\end{aligned}$$

是以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(b_n) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n\right) = e^{-1}$.

註：嚴格說來，我們並無「Riemann sum 之極限等於瑕積分」之定理，讀者若有興趣可參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第六章 §6.7 之例 6。

♠ (15-13) 試證： $\ln(n!) \sim n \ln n - n$ ，其中 n 為一整數且 $n \gg 1$ 。

分析 $\sim$ 表 asymptotically equal to，即二者之極限為 1。符號「 $n \gg 1$ 」原意為 n is much greater than 1。題意為：試證

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n - n} = 1.$$

因為 $\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdots n) = \sum_{k=1}^n \ln k$ ，其中每一 $\ln k$ 設法以二積分將它圍起來。

【解】

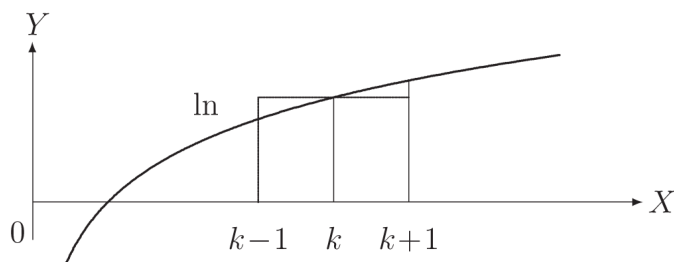


圖 15-3 註：二矩形之面積皆為 $\ln k$

由於 $\ln$ 為一遞增函數，是以 $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt, \quad (\text{參閱上圖})$$

所以

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \ln t \, dt,$$

故

$$\int_1^n \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln t \, dt \leq \int_1^{n+1} \ln t \, dt,$$

已知 $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$, 是以上式可化爲

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - n.$$

應有

$$1 + \frac{1}{n \ln n - n} \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln n - n} \leq \frac{(n+1) \ln(n+1) - n}{n \ln n - n}. \quad (*)$$

當 $n \rightarrow +\infty$ 時, 左端之極限顯然爲 1, 至於右端,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln(n+1) - n}{n \ln n - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{n}{n \ln n}}{1 - \frac{n}{n \ln n}} = 1.$$

[註: 利用 l'Hospital 規則, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1.]$

由 (*) 式知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n - n} = 1.$

§ 16 微積分基本定理

[注意] 定積分求值之題目 (利用微積分基本定理第二型), 放在上一單元.

本單元中將多次使用以下之「微積分基本定理第一型」:

設 f 為一函數, 且在區間 $I = [a, b]$ 為可積, 次設函數

$$A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : A(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

若 f 在 $x_0 \in [a, b]$ 為連續, 則 A 在 x_0 為可微分, 且 $A'(x_0) = f(x_0)$.

以及它衍生出來的系: $\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt = f(u(x))u'(x)$. 其中所需之條件, 請參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第六章 §6.4 系 6.18.

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

♠ (16-1) 試求 $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\sin u}{u} du$.

分析 必須將積分化為二項 $\int_{\sqrt{x}}^{x^2} = \int_0^{x^2} - \int_0^{\sqrt{x}}$ 再微分之.

【解】 利用微積分基本定理第一型之系,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\sin u}{u} du &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du \right) \\ &= \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2 \sin x^2}{x} - \frac{\sin \sqrt{x}}{2x}. \end{aligned}$$

♠ (16-2) 試求極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \frac{dt}{3t + \sqrt{t^2 + 1}} = ?$

分析 本題不能直接利用微積分基本定理第一型, 但顯然 $\frac{1}{h} \int_2^{2+h} \frac{dt}{3t + \sqrt{t^2 + 1}}$ 是一種差商, 我們需要設計一個函數, 再微分之. 另一個方法則是利用 l'Hospital 規則.

【解】法一：令 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : F(x) = \int_0^x \frac{dt}{3t + \sqrt{t^2 + 1}}$ ，利用微積分基本定理第一型，應有

$$F'(x) = \frac{1}{3x + \sqrt{x^2 + 1}}, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} = F'(2) \\ &= \frac{1}{3x + \sqrt{x^2 + 1}} \Big|_{x=2} = \frac{1}{6 + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

法二：利用 l'Hospital 規則，

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_2^{2+h} \frac{dt}{3t + \sqrt{t^2 + 1}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3(2+h) + \sqrt{(2+h)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{6 + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

♠ (16-3) 設 $f(t) = \begin{cases} \exp(-t^2), & \text{若 } t \neq 1, \\ 0, & \text{若 } t = 1. \end{cases}$ ， $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ， $\forall x \in \mathbb{R}$ ，

試求 $F'(0) = ?$ $F'(1) = ?$

【分析】顯然 f 於點 1 不為連續，不可直接以微積分基本定理第一型解之。另一方面， f 之值只有一點「跳」下來，其實積分值 $F(x)$ 與 $f(1)$ 之值並無關聯。

【解】令 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : g(t) = \exp(-t^2)$ ，則

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x g(t) dt.$$

(註： f 與 g 僅在 $t = 1$ 時不相等，不影響積分值。)

由於 g 為連續函數，利用微積分基本定理

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x g(t) dt = g(x) = \exp(-x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

故 $F'(0) = \exp(0) = 1$ ， $F'(1) = \exp(-1) = e^{-1}$ 。

♠ (16-4) 設 $F(x) = \int_0^x (x-t) \cdot \sin^2 t dt$ 。試求 $F'(x) = ?$

【分析】積分之內含有兩個變數 t 和 x ，其實，在 $\int_0^x x \sin^2 t dt$ 內之 x 對 t 而言乃為一常數，可以提到積分符號之外。

【解】由於

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x (x-t) \sin^2 t \, dt \\
 &= \int_0^x x \sin^2 t \, dt - \int_0^x t \sin^2 t \, dt \\
 &= x \int_0^x \sin^2 t \, dt - \int_0^x t \sin^2 t \, dt, \quad (\because x \text{ 對 } t \text{ 而言乃爲一常數}) \\
 &= x \int_0^x \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt - \int_0^x t \sin^2 t \, dt \\
 &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} \sin 2x - \int_0^x t \sin^2 t \, dt.
 \end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= x - \frac{1}{4}(\sin 2x + 2x \cos 2x) - x \sin^2 x \\
 &= x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2}(1 - 2 \sin^2 x) - x \sin^2 x \\
 &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x.
 \end{aligned}$$

♠ (16-5) 設 $F: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}: F(x) = \int_0^x [t] \, dt$, 內 $[]$ 表括號函數 (即高斯符號).

- (a) 試求 $F'(0)$ 及 $F'(2)$.
- (b) 試問函數 F 在點 1 是否爲可微分? 理由?
- (c) 試求 F 之導函數 F' .

分析 先解出 F , 其後一步步往下做. 在解題中, 若直接使用微積分基本定理第一型, 一不小心就會犯錯.

【解】當 $0 \leq x \leq 1$ 時, $F(x) = \int_0^x [t] \, dt = 0$.

當 $1 < x \leq 2$ 時, $F(x) = \int_0^x [t] \, dt = \int_0^1 [t] \, dt + \int_1^x [t] \, dt = 0 + x - 1$.

故

$$F: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}: F(x) = \int_0^x [t] \, dt = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & \text{若 } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

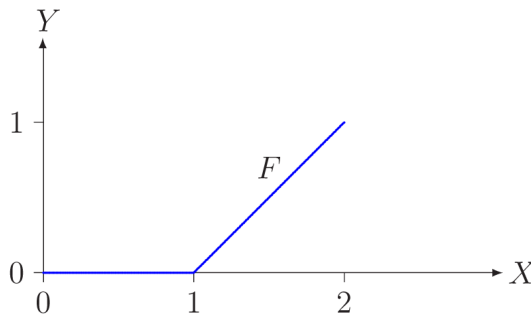


圖 16-1

(a) $F'(0) = 0$, (因 F 於 $[0, 1]$ 上為常數;)

$F'(2) = 1$, (因 $F(x) = x - 1$, $\forall x \in [1, 2]$.)

(b) 由於 $F'_-(1) = 0 < 1 = F'_+(1)$, 故 F 於點 1 不為可微分.

(c) F 之導函數為

$$F': [0, 2] \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{若 } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

♠ (16-6) 若界定函數 $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

試求: $D(\ln x)$; 並證: 對於任意正實數 a 與 b , $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

分析 後一部分之解題關鍵在於: 對 $\ln(ax) = \int_1^{ax} \frac{dt}{t}$ 微分.

【解】 (a) $D \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

(b) 設 $a > 0$ 為一常數, 由於

$$\frac{d}{dx}(\ln(ax)) = \frac{d}{dx} \int_1^{ax} \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln x, \quad \forall x > 0,$$

由微分均值定理之系知, 存在常數 C 滿足

$$\forall x > 0, \quad \ln(ax) = \ln x + C, \quad (*)$$

以 $x = 1$ 代入 $(*)$ 式, 得 $C = \ln a$, 代回 $(*)$ 式, 得

$$\forall x > 0, \quad \ln(ax) = \ln x + \ln a,$$

亦即 $\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$.

♠ (16-7) 試求函數 f 滿足 $f'(x) = |x|^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 且 $f(-1) = 1$.

分析 利用不定積分求出「含常數 k 」之函數 f , 再由最後條件求出 k .

【解】 由 $f'(x) = |x|^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 知, 存在待定常數 k 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x |t|^3 dt + k = \begin{cases} \frac{t^4}{4} \Big|_0^x + k, & \text{若 } x \geq 0, \\ -\frac{t^4}{4} \Big|_0^x + k, & \text{若 } x < 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x^4}{4} + k, & \text{若 } x \geq 0, \\ -\frac{x^4}{4} + k, & \text{若 } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

但 $f(-1) = 1$ ，即 $1 = \frac{-1}{4} + k$ ，是以 $k = \frac{5}{4}$ ，故

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} \frac{5+x^4}{4}, & \text{若 } x \geq 0, \\ \frac{5-x^4}{4}, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

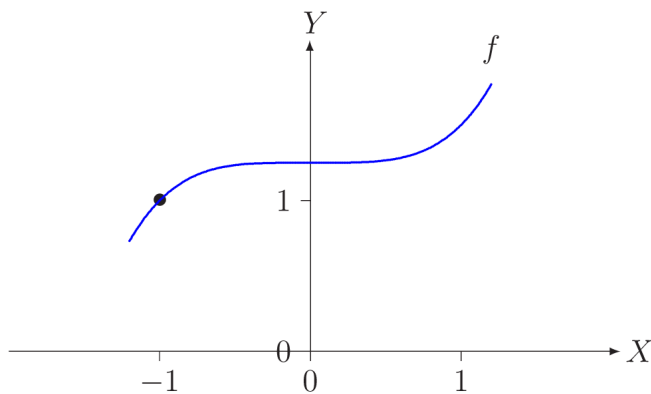


圖 16-2

♠ (16-8) 設函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續且滿足方程式 $f(x) = \int_0^x f(t)dt - 1$ 。試求此函數 f 。

分析 利用微積分基本定理第一型，可立得 $f'(x) = f(x)$ ，此一性質與 $\exp$ 相同，因此， f 與 $\exp$ 可能有相當關係，下一步則是令 $g(x) = f(x)/\exp x$ ，微分之，以解得二者之關係。

【解】 利用微積分基本定理， $\forall x \in \mathbb{R}$ ，

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x). \quad (\star)$$

令 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = \frac{f(x)}{\exp x}$ ，則因 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，

$$g'(x) = \frac{f'(x) \exp x - f(x) \exp x}{\exp(2x)} = 0, \quad [\because (\star)]$$

是以 g 必為一常數函數，而 $g(0) = \frac{f(0)}{\exp 0} = f(0) = -1$ 。亦即 $g(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ ，換言之， $f(x) = -\exp x$ 。

♠ (16-9) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \int_1^x t^2 \sqrt{3+t^4} dt + 2$ 。

- (a) 試求 f 在何處為凹向上？在何處為凹向下？
 (b) 試證 f 具反函數 f^{-1} ；
 (c) 試求 f 之值域；
 (d) 試求 f^{-1} 在點 $(2, f^{-1}(2))$ 之切線方程式；
 (e) 試證： $\frac{4}{3} < f(0) < \frac{5}{3}$ 。

分析 f 是一個以積分為定義之函數，先將 f 微分二次，其後可以逐步解決。此為一綜合性題目，涵蓋微積分許多不同單元。

【解】(a) 由於 $y = t^2\sqrt{3+t^4}$ 為連續，應有

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2\sqrt{3+x^4}, \\ f''(x) &= 2x\sqrt{3+x^4} + \frac{4x^5}{2\sqrt{3+x^4}} \\ &= \frac{2x(3+2x^4)}{\sqrt{3+x^4}} \begin{cases} < 0, & \text{若 } x < 0, \\ = 0, & \text{若 } x = 0, \\ > 0, & \text{若 } x > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

故知 f 於 $(-\infty, 0]$ 為凹向下而於 $[0, +\infty)$ 為凹向上。

- (b) 由 (a)， $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ，知 f 為遞增，故必為嵌射，是以具反函數。
 (c) 先證： $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ，此因 $\forall x > 1$ ，

$$\int_1^x t^2\sqrt{3+t^4} dt + 2 \geq \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}(x^3 - 1).$$

其次，證明： $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ，此因 $\forall x < 1$ ，

$$\begin{aligned} \int_1^x t^2\sqrt{3+t^4} dt + 2 &= -\int_x^1 t^2\sqrt{3+t^4} dt + 2 \\ &\leq -\int_x^1 t^2 dt + 2 = \frac{1}{3}(x^3 - 1) + 2. \end{aligned}$$

以上二極限說明 f 為無上界且無下界，且因 f 為連續，故值域為 $\mathbb{R}$ 。

- (d) 由原設顯然 $f(1) = 2$ ，亦即 $f^{-1}(2) = 1$ ，利用反函數之導數公式得，

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1^2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2},$$

是以 f^{-1} 過點 $(2, f^{-1}(2))$ 之切線方程式為 $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$ 。

(e) 利用積分之保序定理,

$$\begin{aligned}
 0 < t < 1 &\Rightarrow t^2 < t^2\sqrt{3+t^4} < t^2\sqrt{3+1} \\
 &\Rightarrow \int_0^1 t^2 dt < \int_0^1 t^2\sqrt{3+t^4} dt < \int_0^1 t^2\sqrt{3+1} dt \\
 &\Rightarrow \frac{1}{3} < \int_0^1 t^2\sqrt{3+t^4} dt < \frac{2}{3} \\
 &\Rightarrow 2 - \frac{1}{3} > 2 + \int_1^0 t^2\sqrt{3+t^4} dt > 2 - \frac{2}{3} \\
 &\Rightarrow \frac{5}{3} > f(0) > \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

♠ (16-10) 設 $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \int_0^x e^{2t} \sin t dt$, 試求 f 之最大值與最小值.

分析 本題需要微積分基本定理第一型以求函數之臨界點, 再以第二型求得最大值與最小值.

【解】 1° 先求 f' , 利用微積分基本定理,

$$f'(x) = e^{2x} \sin x \begin{cases} > 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, \\ = 0, & \text{若 } x \in \{0, \pi, 2\pi\}, \\ < 0, & \text{若 } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

知 f 僅有 $0, \pi, 2\pi$ 三個臨界點, 此外 f 在緊緻區間 $[0, 2\pi]$ 上為連續, 故只需比較 $f(0), f(\pi), f(2\pi)$ 三值. (註: 雖然我們已知 f 在點 π 有最大值, 但依題意我們仍須求出其值.)

2° 次求不定積分 $\int e^{2t} \sin t dt$, 先令 $u = e^{2t}$, $dv = \sin t dt$, 則 $du = 2e^{2t} dt$, $v = -\cos t$,

$$\begin{aligned}
 \int e^{2t} \sin t dt &= -e^{2t} \cos t + 2 \int e^{2t} \cos t dt \\
 &= -e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \sin t - 4 \int e^{2t} \sin t dt, \quad (\text{再一次 by parts})
 \end{aligned}$$

是以

$$\int e^{2t} \sin t dt = \frac{e^{2t}}{5}(2 \sin t - \cos t) + C.$$

3° 最後,

$$f(0) = 0,$$

$$f(\pi) = \frac{e^{2\pi}}{5}(2 \sin \pi - \cos \pi) \Big|_0^\pi = \frac{1}{5}e^{2\pi} + \frac{1}{5}.$$

$$f(2\pi) = \frac{e^{2\pi}}{5}(2 \sin 2\pi - \cos 2\pi) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{5}e^{4\pi} + \frac{1}{5} < 0.$$

故知 f 在點 π 有最大值 $\frac{1}{5}e^{2\pi} + \frac{1}{5}$, 在點 2π 有最小值 $-\frac{1}{5}e^{4\pi} + \frac{1}{5}$.

♠ (16-11) 設 $f(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{\sin u}{u}$, $t \in \mathbb{R}$, $S(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(a) 試求 $S(0) = ?$

(b) 試求 $\frac{d}{dx}S(0) = ?$

(c) 試證: $\int_0^x S(t)dt = xS(x) + \cos x - 1$.

分析 (a) 與 (b) 都不難, 至於 (c), 可先證左右兩端之導數相同.

【解】 由原設知

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{若 } t \neq 0, \\ 1, & \text{若 } t = 0. \end{cases}$$

顯然

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad tf(t) = \sin t. \quad (1)$$

(a) $S(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$, 此係定義, 上下限相同且在 D_f 內.

(b) 由於 f 為連續, 利用微積分基本定理第一型, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}S(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x). \quad (2)$$

再令 $x = 0$, 得 $\frac{d}{dx}S(0) = f(0) = 1$.

(c) 令

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = xS(x) + \cos x - 1,$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: h(x) = \int_0^x S(t)dt, .$$

則 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= S(x) + xS'(x) - \sin x \\ &= S(x) + xf(x) - \sin x, \quad (\text{由 (2) 式}) \\ &= S(x), \quad (\text{由 (1) 式}) \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^x S(t)dt = h'(x). \end{aligned}$$

知存在常數 $C \in \mathbb{R}$ 使得

$$g(x) - h(x) = C, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

令 $x = 0$, 得 $C = g(0) - h(0) = 0$, 故證得 $h = g$, 亦即

$$\int_0^x S(t) dt = xS(x) + \cos x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

♠ (16-12) 試證： $\frac{x}{1+x^2}e^{-x^2/2} < \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt < \frac{1}{x}e^{-x^2/2}, \quad \forall x > 0.$

分析 Riemann 積分之保序性質如下：

- $\left(f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b] \right) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$
- $\left(f(x) < g(x), \quad \forall x \in (a, b) \right) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx.$

【證】 令

$$F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : F(x) = \frac{x}{1+x^2}e^{-x^2/2},$$

$$G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : G(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt,$$

$$H: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : H(x) = \frac{1}{x}e^{-x^2/2}.$$

其次 $\forall x > 0$,

$$F'(x) = -e^{-x^2/2} \cdot \frac{-1 + 2x^2 + x^4}{1 + 2x^2 + x^4},$$

$$G'(x) = -e^{-x^2/2},$$

$$H'(x) = -\frac{x^2 + 1}{x^2}e^{-x^2/2}.$$

是以

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad & \frac{-1 + 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} < 1 < \frac{t^2 + 1}{t^2} \\ \Rightarrow & \frac{-1 + 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4}e^{-t^2/2} < e^{-t^2/2} < \frac{t^2 + 1}{t^2} \cdot e^{-t^2/2} \\ \Rightarrow & -F'(t) < -G'(t) < -H'(t) \\ \Rightarrow & -\int_x^{+\infty} F'(t) dt < -\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt < -\int_x^{+\infty} H'(t) dt, \quad \forall x > 0 \\ & \hspace{15em} (\text{積分之保序性}) \\ \Rightarrow & \frac{x}{1+x^2}e^{-x^2/2} < \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt < \frac{1}{x}e^{-x^2/2}, \quad (\text{見下方之 } (\star)). \end{aligned}$$

(★)

$$\begin{aligned}
 -\int_x^{+\infty} F'(t) dt &= -\lim_{y \rightarrow +\infty} [F(t)]_x^y \\
 &= -\lim_{y \rightarrow +\infty} (F(y) - F(x)) = \frac{x}{1+x^2} e^{-x^2/2}, \\
 -\int_x^{+\infty} H'(t) dt &= -\lim_{y \rightarrow +\infty} [H(t)]_x^y \\
 &= -\lim_{y \rightarrow +\infty} (H(y) - H(x)) = \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.
 \end{aligned}$$

♠ (16-13) 試求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

分析 化爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，再利用 l'Hospital 規則。

【解】由於 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{t^2} dt = +\infty$,

$$\begin{aligned}
 \text{原題} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt + x e^{x^2}}{2x e^{x^2}}, \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{2x e^{x^2}} + \frac{1}{2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}} + \frac{1}{2}, \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + 4x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

♠ (16-14) 設函數 f 於區間 $(0, +\infty)$ 上爲可微分，且對任意正數 a 與 b 皆有等式 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 。試證：

(a) $\forall x > 0, f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$;

(b) 存在常數 k 使得 $\forall x > 0, f(x) = k \int_1^x \frac{dt}{t}$;

(c) 若 $f'(1) = 1$ ，則 $f = \ln$ 。

分析 本題之關鍵在於將 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 化成 $f(ax) = f(a) + f(x)$ ，再微分之，即可一步步證得三個小題之結果，過程中需要使用微積分基本定理第二型。

【證】(a) 由題意知，

$$f(ax) = f(a) + f(x), \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

(1) 式兩端分別對 x 微分之，得

$$af'(ax) = f'(x), \quad \forall x > 0,$$

再以 $1/x$ 代入上式之 a ，則得

$$\frac{1}{x}f'(1) = f'(x). \quad (2)$$

(b) (1) 式中以 1 代 x 即得 $f(1) = 0$ 。其次，(2) 式中令 $k = f'(1)$ ，再積分之，則

$$k \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x f'(t) dt = f(x) - f(1) = f(x). \quad (3)$$

(c) 若 $f'(1) = 1$ ，則由 (3) 式得，

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x, \quad \forall x > 0.$$

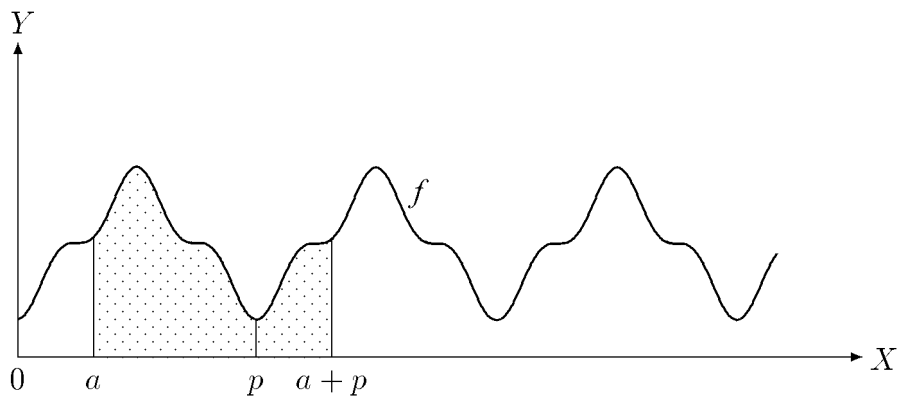


圖 17-1

【證】由於

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^p f(x) dx + \int_p^{a+p} f(x) dx. \quad (*)$$

而在右端第三項中, 令 $t = x - p$, 則 $x = t + p$, 是以

$$\begin{aligned} \int_p^{a+p} f(x) dx &= \int_0^a f(t+p) dt \\ &= \int_0^a f(t) dt, \quad (\text{因 } p \text{ 爲 } f \text{ 之週期}) \\ &= - \int_a^0 f(t) dt. \end{aligned}$$

代入 (*) 式中, 即得 $\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_0^p f(x) dx$.

♠ (17-3) 試證 :

(a) 若 f 爲可積之偶函數, 則 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(b) 若 f 爲可積之奇函數, 則 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

分析 這是兩個很有用的性質, 若 f 爲偶函數, 亦即 $f(-x) = f(x)$, 此乃表示 f 之圖形對稱於 Y 軸. 從 $-a$ 到 a 之積分值等於從 0 到 a 積分值的二倍. 若 f 爲奇函數, 亦即 $f(-x) = -f(x)$, 此乃表示 f 之圖形對稱於原點, 從 $-a$ 到 0 之積分值與從 0 到 a 之積分值異號而絕對值相等.

【證】(a) 若 f 爲可積之偶函數, 則 $f(-x) = f(x)$, 對於積分 $\int_{-a}^0 f(x) dx$, 我們作變換 $x = -t$, 則 $dx = -dt$, 於是

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx.$$

故

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(b) 若 f 為可積之奇函數, 則 $f(-x) = -f(x)$, 對於積分 $\int_{-a}^0 f(x) dx$, 我們作變換 $x = -t$, 則 $dx = -dt$, 於是

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = - \int_0^a f(t) dt.$$

故

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

♠ (17-4) 試證: $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^5 x}{3 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{3 + \cos^2 x} dx.$

分析 本題無需解出等式左右兩端之積分值, 僅需以代換方法解決.

【證】 令 $u = \pi - x$, 則 $\sin u = \sin x$, $\cos u = -\cos x$,

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^5 x}{3 + \cos^2 x} dx &= - \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin^5 u}{3 + \cos^2 u} du \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 u}{3 + \cos^2 u} du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{3 + \cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

註: 可能有人對於最後一等式感到困惑, 其實, 若 f 在區間 $[a, b]$ 為可積, 則

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(z) dz.$$

其積分值與變數符號無關.

♠ (17-5) 試求積分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x) + \ln(2-x)} dx = ?$

分析 本題若先求不定積分 $\int \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x) + \ln(2-x)} dx$, 將無從下手.

【解】 設 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x) + \ln(2-x)} dx$, 其次, 令 $u = 1 - x$, 則 $x = 1 - u$,

$$I = - \int_1^0 \frac{\ln(2-u)}{\ln(2-u) + \ln(1+u)} du = \int_0^1 \frac{\ln(2-u)}{\ln(2-u) + \ln(1+u)} du,$$

是以

$$\begin{aligned} 2I &= I + I \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x) + \ln(2-x)} dx + \int_0^1 \frac{\ln(2-u)}{\ln(2-u) + \ln(1+u)} du \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x) + \ln(2-x)}{\ln(2-x) + \ln(1+x)} dx = \int_0^1 dx = 1. \end{aligned}$$

得 $I = 1/2$.

♠ (17-6) 試求 $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} dx = ?$

分析 解出不定積分 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} dx$ 是件十分繁複的工作，利用積分之變數代換則輕而易舉。

【解】 令 $I = \int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} dx$ ，由於被積函數為連續，故 $I \in \mathbb{R}$ 。其次對此積分做變數代換，令 $u = 2 - x$ ，則 $du = -dx$ ，是以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{\sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u} + \sqrt{u}} du \\ &= \int_0^2 \frac{\sqrt{2-u} + \sqrt{u} - \sqrt{u}}{\sqrt{2-u} + \sqrt{u}} du \\ &= \int_0^2 du - \int_0^2 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{2-u}} du = 2 - I, \end{aligned}$$

得 $I = 1$ 。

♠ (17-7) 試求 $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = ?$

分析 本題須將積分範圍分割為 $(0, 1]$ 及 $[1, +\infty)$ 二區間，證明函數在二區間之瑕積分值絕對值相等但符號相反。本題與「積分變換」和「瑕積分」皆有關，但變換意味較濃。

【解】 1° 先證： $\int_{0+}^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ 為收斂。
令

$$f, g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \ln x (\leq 0), \quad g(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} (\leq 0).$$

由於 $\int_{0+}^1 f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0+} \left[x \ln x - x \right]_t^1 = -1$ ，收斂，且 $\lim_{x \rightarrow 0+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 1$ ，

故知 $\int_{0+}^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ 為收斂。

2° 令 $t = 1/x$, 則

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_1^{0+} \frac{\ln \frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{-1}{t^2} dt = - \int_{0+}^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt.$$

是以

$$\text{原題} = \int_{0+}^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0.$$

♠ (17-8) 試求 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = ?$

分析 本題若先求不定積分, 各種方法皆行不通, 但因積分之上、下限分別為 0 及 π , 不妨以 $t = \pi - x$ 代換試之.

【解】 先令 $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$, 再以 $t = \pi - x$ 做代換, 則

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = - \int_\pi^0 \frac{(\pi-t) \sin t}{1+\cos^2 t} dt \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt \\ &= \pi \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} - I, \quad (\text{第一項令 } u = \cos t) \\ &= \left[\pi \tan^{-1} u \right]_{-1}^1 - I = \pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - I = \frac{\pi^2}{2} - I. \end{aligned}$$

故 $I = \frac{\pi^2}{4}$.

【解】先求不定積分，令 $u = \sqrt{x}$ ，則 $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ，

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2du}{1+u^2} = 2 \tan^{-1} u + C = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C.$$

是以

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[2 \tan^{-1} \sqrt{x} \right]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} 2(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} \sqrt{t}) = 2 \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}; \\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 2(\tan^{-1} \sqrt{t} - \tan^{-1} 1) = \pi - 2 \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

故

$$\int_{0^+}^{+\infty} f(x) dx = \int_{0^+}^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx = \pi,$$

是為收斂。

♠ (18-3) 設 α 為一實數，試問瑕積分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 是否為收斂？

【分析】本題須利用瑕積分斂散性判別定理，（拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第六章定理 6.22.）

【解】已知 $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx$ 為收斂；利用 l'Hospital 規則，

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0.$$

故知 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ，瑕積分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 皆為收斂。

♠ (18-4) 設 α 為一實數，

(1) 試問 α 為何值方使瑕積分 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 為收斂？

(2) 若令上述瑕積分為 $\Gamma(\alpha)$ ，試證： $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ ， $\forall \alpha > 0$ 。

(3) 試證： $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}$.

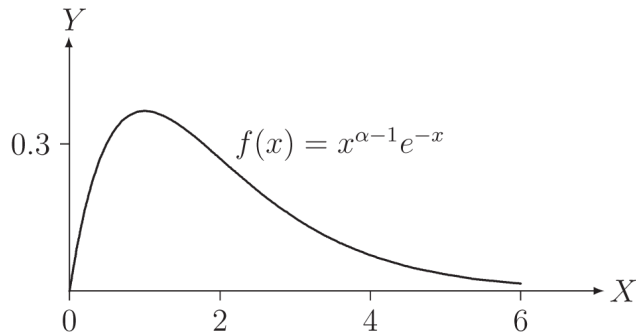


圖 18-1 $\alpha = 2$ 時被積函數之圖形

分析 本例之函數 Γ 稱為 **gamma 函數**[†]，在《機率論》及《統計學》及其他應用數學上十分重要。

【解】(1) 由於

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

在上題中，我們已知上式右端第二項之瑕積分為收斂（不論 α 為何值），是以

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ 為收斂} &\Leftrightarrow \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ 為收斂} \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 x^{\alpha-1} dx \text{ 為收斂, } \left(\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1 \right) \\ &\Leftrightarrow \alpha - 1 > -1 \\ &\Leftrightarrow \alpha > 0. \end{aligned}$$

(2) $\forall \alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x^{\alpha} e^{-x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^t + \alpha \int_0^t x^{\alpha-1} e^{-x} dx \right], \quad (\text{分部積分}) \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad [*] \\ &= \alpha \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

[*] 利用 l'Hospital 規則， $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\alpha}}{e^t} = 0$.

[†] 當 $0 < \alpha < 1$ 時， $\Gamma(\alpha)$ 乃第一及第二型瑕積分之混合，即 $\int_{0^+}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 但在無誤解之可能時，常將積分下限 0^+ 寫為 0。

(3) 由於

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^0 dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} \right]_0^t = 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! . \end{aligned}$$

♠ (18-5) 設 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ (Gamma 函數). 試證 :

$$(a) \quad \Gamma(\alpha) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2\alpha-1} e^{-t^2} dt ;$$

$$(b) \quad \Gamma(\alpha) = \int_{0^+}^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha-1} du .$$

分析 本題亦為積分之變數代換.

【證】(a) 在 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 中, 令 $t = \sqrt{x}$, 則 $x = t^2$, $dx = 2t dt$,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} t^{2(\alpha-1)} e^{-t^2} 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} t^{2\alpha-1} e^{-t^2} dt.$$

(b) 對於積分 $\int_{0^+}^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha-1} du$, 做變換 $x = \ln \frac{1}{u} = -\ln u$, 則 $u = e^{-x}$,
 $du = -e^{-x} dx$, (注意: $u \rightarrow 0^+$ 時, 變換後 $x \rightarrow +\infty$.)

$$\int_{0^+}^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha-1} du = - \int_{+\infty}^0 x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha).$$

♠ (18-6) 試討論 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 之收斂性, 內 $p \in \mathbb{R}$. 若為收斂, 並求其收斂值.

分析 若能將 p 應分為以下三種情形: $p > 1$, $p = 1$, $p < 1$, 解題無太大困難.

【解】1° 若 $p > 1$, 則

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_3^t \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1} \right]_3^t \\ &= \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}, \quad \text{收斂.} \end{aligned}$$

2° 若 $p = 1$ ，則因

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_3^t \frac{dx}{x(\ln x)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) \Big|_3^t = +\infty,$$

知瑕積分爲發散.

3° 若 $p < 1$ ，則因

$$\frac{1}{x(\ln x)^p} > \frac{1}{x(\ln x)} > 0, \quad \forall x \geq 3,$$

故瑕積分亦爲發散. (此處我們再度使用定理.)

♠ (18-7) 試問哪些 k 值可使瑕積分 $\int_{0^+}^1 x^{-k} \sin x \, dx$ 收斂，哪些 k 值可使之發散？

分析 我們需要瑕積分斂散性定理以及 $k < 1$ 時， $\int_{0^+}^1 x^{-k} \, dx$ 爲收斂之常識.

【解】 令

$$g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{x^{k-1}} > 0,$$

$$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^{-k} \sin x > 0.$$

則因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，知

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^1 x^{-k} \sin x \, dx \text{ 爲收斂} &\Leftrightarrow \int_{0^+}^1 g(x) \, dx \text{ 爲收斂} \\ &\Leftrightarrow k - 1 < 1, \quad (\text{見下註}) \\ &\Leftrightarrow k < 2. \end{aligned}$$

是以瑕積分爲收斂之充要條件爲 $k < 2$.

[註] 參見拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第六章 §6.6 例 1.

♠ (18-8) 試檢驗瑕積分 $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ 之斂散性，若爲收斂，並求其收斂值.

分析 原題拆爲二瑕積分，若皆爲收斂方可稱原題爲收斂.

【解】 考慮

$$\int_{0^+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = \int_{0^+}^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx. \quad (\star)$$

由於

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = -2 \int e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) = -2e^{-\sqrt{x}} + C.$$

是以瑕積分

$$\int_{0+}^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} -2e^{-\sqrt{x}} \Big|_t^1 = 2 - 2e^{-1}, \text{ 收斂};$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^t = 2e^{-1}, \text{ 收斂}.$$

故由 (*) 知, 原題 = 2.

♠ (18-9) 設 f 在 $[0, 1]$ 為連續, 試求 $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t^3} dt = ?$

分析 本題需利用微積分基本定理第一型.

【解】 1° 若 $\int_{0+}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt$ 為收斂, 則 $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t^3} dt = 0$.

2° 若 $\int_{0+}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt = \pm\infty$, 則利用 l'Hospital 規則及微積分基本定理第一型,

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_x^1 \frac{f(t)}{t^3} dt}{x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{f(t)}{t^3} dt}{\frac{d}{dx}(x^{-2})}, \quad (\because \text{分子分母極限皆為無限大}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{f(x)}{x^3}}{-2 \cdot x^{-3}} = \frac{f(0)}{2}. \end{aligned}$$

♠ (18-10) 試證 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 為收斂.

分析 本瑕積分在數學理論與應用都十分重要, 其值可利用「重積分」方法解出.

【證】 由於被積分函數為偶函數,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx + 2 \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

函數 e^{-x^2} 在區間 $[0, 1]$ 為連續, 故上式右端第一項顯然為有限, 至於第二項, 由於

(1) 已知 $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = x^{-2}$ 之瑕積分 $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx$ 為收斂;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-x^2)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\exp(x^2)} = 0,$

利用瑕積分斂散性判別定理，知 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 為收斂，是以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ 亦為收斂。

♠ (18-11) 試求 $\int_0^{\pi/2^-} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{3}}}$ 。

分析 本題為成大某學年轉學生考試之考題，它是由 $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^k x dx}{\cos^k x + \sin^k x}$ ，改變而成，當然更難，提醒讀者注意：當 f 在區間 $[a, b]$ 為可積時， $\int_a^{b^-} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ 。

【解】令 $k = \sqrt{3}$ ， $I = \int_0^{\pi/2^-} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{3}}}$ ，則

$$I = \int_0^{\pi/2^-} \frac{dx}{1 + (\tan x)^k} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^k x dx}{\cos^k x + \sin^k x}.$$

(註：由於右端之 Riemann 積分存在，因此等於瑕積分。)

其次，做積分變換，令 $u = \frac{\pi}{2} - x$ ，則 $x = \frac{\pi}{2} - u$ ， $dx = -du$ ，

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos^k(\frac{\pi}{2} - u)}{\cos^k(\frac{\pi}{2} - u) + \sin^k(\frac{\pi}{2} - u)} du \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k u}{\sin^k u + \cos^k u} du. \end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k x dx}{\sin^k x + \cos^k x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^k x dx}{\sin^k x + \cos^k x} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k x + \cos^k x}{\sin^k x + \cos^k x} dx = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

故 $I = \frac{\pi}{4}$ 。

♠ (18-12) 試求 $\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)H\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x dx$ ，其中 $H(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \geq 0, \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$

分析 本題看似複雜，仔細觀察被積函數，其實它十分單純。這種方法種為「截切」(truncation)，本題係將 $\sin$ 在 $[0, \pi/2]$ 之外截掉。

【解】設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = H(x)H\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x$ ，

- 當 $x < 0$ 時， $H(x) = 0$ ，故 $f(x) = 0$ 。

- 當 $x > \frac{\pi}{2}$ 時, $H\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, 故 $f(x) = 0$.

是以

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x < 0 \text{ 或 } x > \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \text{若 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

♠ (18-13) 設 $0 < p < q$, 試證: $\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 為收斂之充要條件為 $0 < p < 1 < q$.

分析 必須分為以下三種情況討論: ① $q > p \geq 1$, ② $1 \geq q > p$, ③ $0 < p < 1 < q$.

而且參考瑕積分 $\int_{0+}^1 \frac{dx}{x}$ 及 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 之斂散性.

【證】 1° 若 $q > p \geq 1$, 則因

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x^p + x^q}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^{p-1} + x^{q-1}} = \begin{cases} 1, & \text{若 } p = 1, \\ +\infty, & \text{若 } p > 1. \end{cases}$$

又已知 $\int_{0+}^1 \frac{dx}{x}$ 為發散, 故 $\int_{0+}^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 為發散, 是以

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx \quad \text{為發散.}$$

2° 若 $1 \geq q > p$, 則因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^p + x^q}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1} + x^{q-1}} = \begin{cases} 1, & \text{若 } q = 1, \\ +\infty, & \text{若 } q < 1. \end{cases}$$

又已知 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 為發散, 故 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 為發散, 是以

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx \quad \text{亦為發散.}$$

3° 當 $0 < p < 1 < q$ 時, 由於

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x^p + x^q}}{\frac{1}{x^p}} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + x^{q-p}} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^p + x^q}}{\frac{1}{x^q}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-q} + 1} = 1, \end{aligned}$$

已知 $\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^p}$ 及 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$ 皆為收斂，故知 $\int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 及 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 皆為收斂，因此， $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 為收斂。

♠ (18-14) 試求積分 $\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$ 。

分析 本題並非瑕積分問題，然而解題過程將定義域切為二段，因此我們以瑕積分處理之。

【解】 1° 先求不定積分：當 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 或 $(\pi/2, 3\pi/2)$ (二者之一，但非聯集)。

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} &= \int \frac{1}{\cos^2 x (\tan^2 x + 4)} dx, \quad (\text{注意分母}) \\
 &= \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 4} dx \\
 &= \int \frac{\sec^2 x}{4 \left(\left(\frac{\tan x}{2} \right)^2 + 1 \right)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1}, \quad (\text{令 } u = \frac{\tan x}{2}) \\
 &= \frac{1}{2} \tan^{-1} u + C \\
 &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{2} \right) + C. \quad (*)
 \end{aligned}$$

2° 利用 (*),

$$\begin{aligned}
 \text{原題} &= \int_0^{\pi/2^-} \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} + \int_{\pi/2^+}^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{2} \right) \Big|_0^t + \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{2} \right) \Big|_t^\pi \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

- 注意：若不留意而以 (*) 直接代入積分之上下限，則

$$\text{原題} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{2} \right) \Big|_0^\pi = 0.$$

但被積函數 $\frac{1}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} > 0, \forall x \in [0, \pi]$ ，積分值必為正，此一答案顯然不正確。

♠ (19-2) 設函數 f 爲一二次多項式。試利用上題之結論證明：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(c) + f(b)),$$

其中 $c = (a+b)/2$ 。

分析 將本題之函數予以平移，以使新函數符合上題之條件，取得上題之結論再代回來。

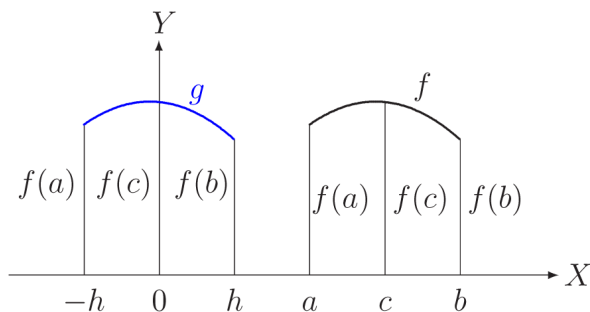


圖 19-2

【證】將本題之函數予以平移，即令 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g(u) = f(u+c)$ ，且 $h = (b-a)/2$ ，則

- g 仍爲一二次多項式；
- $a = c - h$, $b = c + h$ ；
- $g(-h) = f(-h+c) = f(a)$, $g(0) = f(c)$, $g(h) = f(h+c) = f(b)$ ；
亦即曲線 g 通過 $(-h, f(a))$, $(0, f(c))$, $(h, f(b))$ 三點。

其次做積分變換，令 $u = x - c$ ，則

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{a-c}^{b-c} f(u+c)du \\ &= \int_{-h}^h g(u)du \\ &= \frac{h}{3}(g(-h) + 4g(0) + g(h)), \quad (\text{上題之結論}) \\ &= \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(c) + f(b)). \end{aligned}$$

♠ (19-3) 爲求積分 $\int_0^1 \exp(-x^2)dx$ 之近似值，利用梯形法而欲使誤差之絕對值小於 10^{-5} ，若將區間 $[0, 1]$ 分割爲 n 等分，試問 n 至少爲多少？

分析 有了電腦軟體的協助，求出某一定積分之近似值並無太大困難，數學學習之目的在於「演繹」(logic deduction)，本題之目的係以演繹方法，推算區間應等分爲多少份方可達到目的。

【解】我們知道：若函數 f 在區間 $[a, b]$ 上為二階連續可微分，在高等微積分中可證明存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = T - \frac{b-a}{12} f''(c) (\Delta x)^2.$$

其中積分之梯形法近似值為

$$T = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n);$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad y_k = f(x_k), \quad \forall k = 0, 1, \cdots, n.$$

亦即以 T 做為積分近似值時，其誤差為 $-\frac{b-a}{12} f''(c) (\Delta x)^2$.

令 $f(x) = \exp(-x^2)$ ，則

$$f'(x) = -2x \exp(-x^2)$$

$$f''(x) = -2 \exp(-x^2) + 4x^2 \exp(-x^2) = 2(2x^2 - 1) \exp(-x^2).$$

由於

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow 0 < x^2 < 1 \\ &\Rightarrow -1 < 2x^2 - 1 < 1 \\ &\Rightarrow |2x^2 - 1| < 1 \\ &\Rightarrow |f''(x)| < 2. \end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned} |\text{誤差}| < 10^{-5} &\Leftrightarrow \left| \frac{b-a}{12} f''(c) (\Delta x)^2 \right| < 10^{-5} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \frac{1}{n^2} < 10^{-5} \\ &\Leftrightarrow n \geq 130. \end{aligned}$$

♠ (19-4) Simpson 法則係以 $\frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h))$ 做為積分 $\int_{-h}^h f(x) dx$ 之近似值。

試證：若 f 為一三次多項式，則 Simpson 法則為精確的，（亦即誤差為 0。）

【分析】我們可以直接求出積分值及 Simpson 法則之近似值，或以高等微積分之理論以說明誤差為 0。

【解】法一：令 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，則積分值

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx \right]_{-h}^h = \frac{2}{3}bh^3 + 2dh. \quad (*)$$

另一方面，由於

$$f(-h) = -ah^3 + bh^2 - ch + d, \quad f(0) = d, \quad f(h) = ah^3 + bh^2 + ch + d,$$

是以 Simpson 法則之近似值為 $\frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h)) = \frac{2}{3}bh^3 + 2dh$, 與 $(\star)$ 式之值相等.

法二：我們知道：若函數 f 在區間 $[a, b]$ 上為四階連續可微分，在高等微積分中可證明存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = S - \frac{b-a}{180} f^{(4)}(c) (\Delta x)^4,$$

其中 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $y_j = f(x_j)$, $\forall j = 0, 1, \dots, n$,

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n),$$

為 Simpson 法則之近似值. 亦即以 S 做為積分近似值時，其誤差為

$$-\frac{b-a}{180} f^{(4)}(c) (\Delta x)^4.$$

但本題 $f(x)$ 為三次多項式，顯然 $f^{(4)}(x) = 0$ ，因此誤差為 0. (不論 n 取多少.)

♠ (19-5) 設 $P(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，經計算得到下列數值：

$$Q_1 = P\left(\frac{1}{6}\right) + P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{5}{6}\right) = 2.361369,$$

$$Q_2 = Q_1 + P\left(\frac{1}{3}\right) + P\left(\frac{2}{3}\right) = 3.9554446,$$

$$Q_3 = Q_2 + P(0) + P(1) = 5.4554446,$$

$$Q_4 = \frac{2}{9}(2Q_1 + Q_2 + Q_3) = 3.1415918.$$

所得到的 Q_4 與 π 非常接近，是否巧合？請說明理由.

分析 解開 Q_4 發現它乃 Simpson 法則近似值之形式，回頭去對 $P(x)$ 做積分.

【解】 由於

$$\begin{aligned} Q_4 &= \frac{2}{9}(2Q_1 + Q_2 + Q_3) \\ &= \frac{2}{9}\left(P(0) + 4P\left(\frac{1}{6}\right) + 2P\left(\frac{1}{3}\right) + 4P\left(\frac{1}{2}\right) + 2P\left(\frac{2}{3}\right) + 4P\left(\frac{5}{6}\right) + P(1)\right) \\ &= 4 \cdot \frac{1/6}{3}\left(P(0) + 4P\left(\frac{1}{6}\right) + 2P\left(\frac{1}{3}\right) + 4P\left(\frac{1}{2}\right) + 2P\left(\frac{2}{3}\right) + 4P\left(\frac{5}{6}\right) + P(1)\right). \end{aligned}$$

此乃函數 P 在區間 $[0, 1]$ 積分之 Simpson 法近似值的四倍 ($n = 6$)，而

$$4 \int_0^1 P(x) dx = 4 \tan^{-1} x \Big|_0^1 = 4 \tan^{-1} 1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Q_4 之值與 π 相近乃十分合理，並非巧合。

♠ (19-6) 將 $\sin x^2$ 展開為冪級數，至 $n = 4$ ，並依此，求 $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 的近似值。

分析 積分近似值問題最大的困難在於誤差之控制，本題並不要求這一點，因此題目只需依照程序做下去就可以了。

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 \Rightarrow \sin x^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \\
 \Rightarrow \int_0^1 \sin x^2 dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)} \\
 &= \frac{1}{1!3} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{5!11} - \frac{1}{7!15} + \cdots,
 \end{aligned}$$

以級數之前四項做為 $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 的近似值應為

$$\frac{1}{1!3} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{5!11} - \frac{1}{7!15} = 0.310268.$$

♠ (19-7) 試以級數法求 $\int_0^1 \exp(t^2) dt$ 的近似值以使誤差之絕對值小於 0.005。

分析 本題在稍早以梯形法討論過，當然最常使用的方法是 Simpson 法則，但誤差之控制則十分麻煩。

【解】 已知 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

以 t^2 代 x ，則 $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!},$$

利用冪級數之積分公式可得

$$\int_0^1 \exp(t^2) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)},$$

若以上述級數之前 m 項部分和 (註：自第 0 項至第 $m-1$ 項) 為積分值之近似值, 其餘部分為誤差, 令之為 $E(m)$, 由於

$$\begin{aligned} E(m) &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} \\ &= \frac{1}{m!(2m+1)} + \frac{1}{(m+1)!(2m+3)} + \frac{1}{(m+2)!(2m+5)} + \cdots \\ &\leq \frac{1}{m!(2m+1)} + \frac{1}{m!(m+1)(2m+1)} + \frac{1}{m!(m+1)^2(2m+1)} + \cdots \\ &= \frac{1}{m!(2m+1)} \left(1 + \frac{1}{(m+1)} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{m!(2m+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m \cdot m!(2m+1)}, \end{aligned}$$

由題意

$$\begin{aligned} |E(m)| < 0.005 &\Leftrightarrow \frac{m+1}{m \cdot m!(2m+1)} < 0.005 \\ &\Leftrightarrow m \geq 5. \end{aligned}$$

是以 $\int_0^1 \exp(t^2) dt$ 的近似值為級數之前五項, 即

$$\sum_{n=0}^4 \frac{1}{n!(2n+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 1.46177.$$

♠ (19-8) 試利用級數展開法計算 $\int_{0+}^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 至三位有效小數.

分析 原題為一瑕積分之近似值, 只需稍加修改即可成為 Riemann 積分之近似值問題, 最後再以冪級數積分法解之.

【解】 由於 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 我們可令

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{若 } x > 0, \\ 1, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

則 $\int_{0+}^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 f(x) dx$, (註：右端為 Riemann 積分而非瑕積分.)

其次，由於

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \Rightarrow f(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots, \quad \forall x \in [0, 1],\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 dx - \frac{1}{3!} \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{5!} \int_0^1 x^4 dx - \frac{1}{7!} \int_0^1 x^6 dx + \cdots \\ &= \left[x \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3!} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{5!} \cdot \frac{x^5}{5} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{7!} \cdot \frac{x^7}{7} \right]_0^1 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \cdots.\end{aligned}$$

若以前三項之和為積分之近似值，則誤差之絕對值

$$\left| \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k-1)!} \right| < \frac{1}{7 \cdot 7!} = \frac{1}{35280} < \frac{10^{-3}}{2}. \quad (\text{見下註})$$

故此積分之三位有效小數近似值為 $1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0.946$.

註： 此處我們以交錯級數之前三項和做為級數和之近似值，則自第四項以後之和乃為「誤差」，其和之絕對值小於第四項之絕對值，理由參見 21 單元 21-16 題。

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{T(x)}{S(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \cos x)}{2 \sin x - 2x \cos x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x + x \sin x}{\cos x - \cos x + x \sin x}, \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + \sin x + x \cos x}{\sin x + x \cos x}, \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \frac{x}{\sin x} \cos x}{1 + \frac{x}{\sin x} \cos x} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

♠ (20-2) 試求由直線 $y = x$ 與函數 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ 之圖形所圍區域之面積。

分析 繪圖是件麻煩的工作，同時也不是解題必要的步驟，但圖能幫助我們掌握全局，因此繪個草圖是解這一類題目最好的開始。

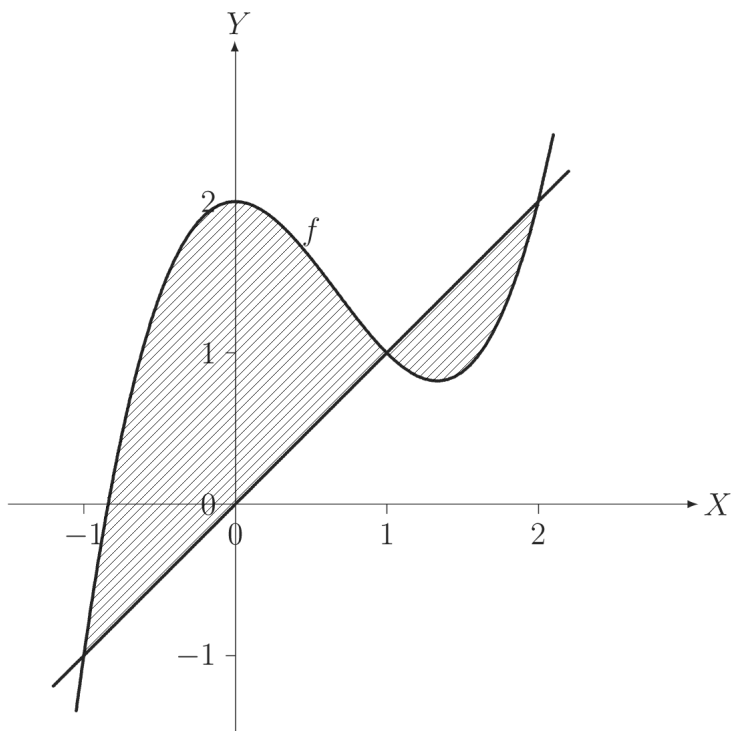


圖 20-2

【解】 先求此二函數圖形之交點，由於

$$\begin{aligned}
x^3 - 2x^2 + 2 &= x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in \{-1, 1, 2\}.
\end{aligned}$$

換言之，此二曲線之交點為 $(-1, -1)$, $(1, 1)$ 及 $(2, 2)$ 。故此二函數之圖形所圍之區間之面積為：

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 + 2 - x| dx \\
 &= \int_{-1}^1 |x^3 - 2x^2 + 2 - x| dx + \int_1^2 |x^3 - 2x^2 + 2 - x| dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 + 2 - x) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 2 - x) dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \\
 &= 37/12.
 \end{aligned}$$

♠ (20-3)

- (a) 試求拋物線 $x^2 = py$ 與 $y^2 = qx$ ，內 $p > 0$, $q > 0$ ，所圍區域之面積；
 (b) 試求以下四條拋物線 $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = ax$, $y^2 = bx$ ，內 $0 < a < b$ ，所圍區域之面積。

分析

(a) 題是容易的，(b) 題則需使用區域面積的加減減。

【解】(a) 先求二條拋物線之交點，由於

$$\frac{x^2}{p} = \sqrt{qx} \Leftrightarrow x^4 = p^2 qx \Leftrightarrow x \in \{0, p^{2/3} q^{1/3}\}.$$

為方便計令 $c = p^{2/3} q^{1/3}$ ，是以所圍區域 R 之面積為

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int_0^c \left(\sqrt{qx} - \frac{x^2}{p} \right) dx = \left[\frac{2}{3} q^{1/2} x^{3/2} - \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{3} x^3 \right]_0^c \\
 &= \frac{1}{3} \left(2 q^{1/2} p q^{1/2} - \frac{1}{p} p^2 q \right) = \frac{1}{3} p q.
 \end{aligned}$$

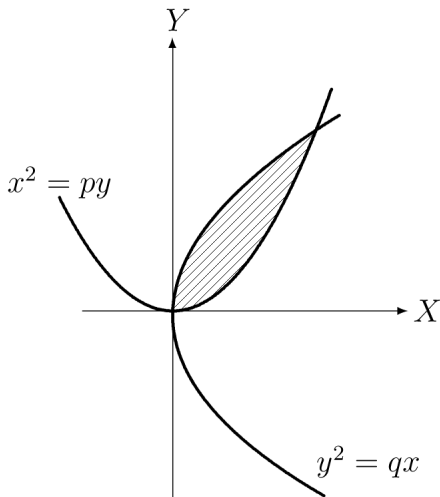


圖 20-3 A

(b) 設

集合 B 爲由拋物線 $x^2 = by$ 及 $y^2 = bx$ 所圍部分，集合 C 爲由拋物線 $x^2 = by$ 及 $y^2 = ax$ 所圍部分，集合 D 爲由拋物線 $x^2 = ay$ 及 $y^2 = bx$ 所圍部分，集合 E 爲由拋物線 $x^2 = ay$ 及 $y^2 = ax$ 所圍部分，則由題意知四條拋物線所圍部分 R 之面積爲

$$\begin{aligned}
 A(R) &= A(B) - A(C) - A(D) + A(E) \\
 &= \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}ab - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}a^2, \quad (\text{參閱 (a) 小題.}) \\
 &= \frac{1}{3}(b-a)^2.
 \end{aligned}$$

(本題亦可不利用 (a) 小題，不過相當麻煩.)

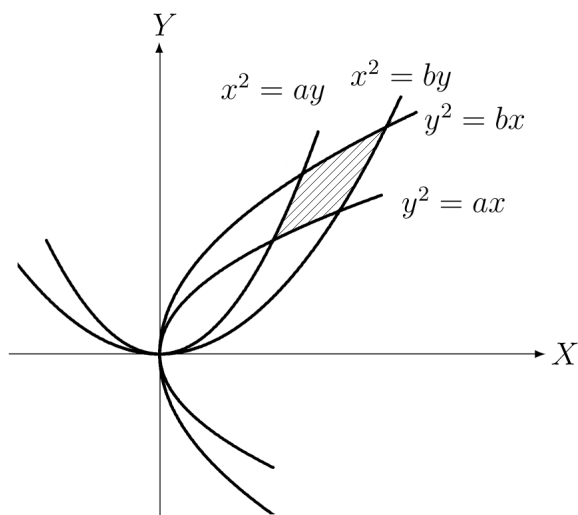


圖 20-3 B

♠ (20-4) 爲求內擺線 $y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$ 與半徑爲 a 圓心在原點之圓所圍區域之面積.

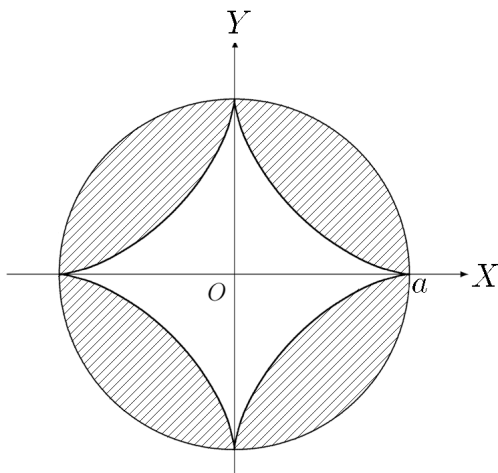


圖 20-4

分析 先求內擺線所圍區域之面積，再以圓面積減之。參數方程式之面積公式為

$$A(R) = \int_a^b |y(\theta)x'(\theta)|d\theta.$$

【解】 我們知道內擺線 $y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$ 之參數方程式為 $\begin{cases} x(\theta) = a \cos^3 \theta, \\ y(\theta) = a \sin^3 \theta, \end{cases} \theta \in [0, 2\pi]$,[†] 所圍區域面積為它在第一象限部分面積之四倍，

$$\begin{aligned} A_1 &= 4 \int_0^{\pi/2} |y(\theta)x'(\theta)|d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} a \sin^3 \theta \cdot 3a \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta \\ &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= 12a^2 \left[\frac{\theta}{16} - \frac{1}{64} \sin 2\theta - \frac{1}{64} \sin 4\theta + \frac{1}{192} \sin 6\theta \right]_0^{\pi/2}, \quad (\text{不定積分見下面 } (\star)) \\ &= \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

故所求之面積為

$$A = \pi a^2 - A_1 = \pi a^2 \left(1 - \frac{3}{8} \right) = \frac{5\pi a^2}{8}.$$

($\star$)

$$\begin{aligned} \int \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta &= \int (\sin \theta \cos \theta)^2 \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right)^2 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4\theta)(1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 2\theta - \cos 4\theta + \cos 2\theta \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos 2\theta - \cos 4\theta + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 6\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{16} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{12} \sin 6\theta \right) + C \\ &= \frac{\theta}{16} - \frac{1}{64} \sin 2\theta - \frac{1}{64} \sin 4\theta + \frac{1}{192} \sin 6\theta + C. \end{aligned}$$

♠ (20-5) 試求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所圍區域之面積。

分析 先將橢圓之上半化為函數 $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ，再積分之，需經積分變換，若使用橢圓之參數方程式求面積則不必變換。

[†] 參見拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第三章 §3.13. 例 7.

【解】設 $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ，故橢圓區域 R 之面積為

$$\begin{aligned}
 A(R) &= 4 \int_0^a f(x) dx \\
 &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\
 &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a \sin u)^2} a \cos u du, \\
 &\quad (\text{令 } x = a \sin u, dx = a \cos u du) \\
 &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du \\
 &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2u + 1}{2} du \\
 &= 4ab \left[\frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin 2u \right]_0^{\pi/2} = \pi ab.
 \end{aligned}$$

♠ (20-6) 試求雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 與直線 $x = a$, ($a > 1$) 所圍區域之面積。

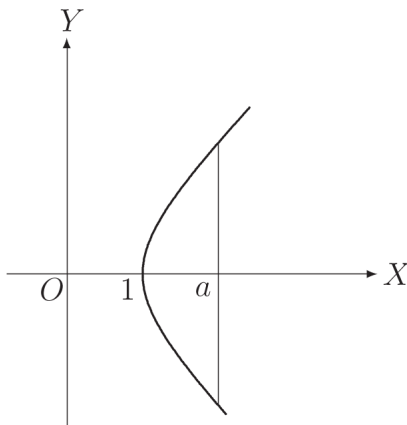


圖 20-5

分析 本題比較困難的部分是不定積分，需要先使用三角代換，後來的 $\int \sec^3 \theta d\theta$ 則需要使用 by parts；當然也可以使用雙曲代換法。由本題說明「不定積分」的底子必須打好，才能應付各種問題。（註：讀者若希望了解 $\int \sec^{2n+1} \theta d\theta$, ($n \in \mathbb{N}$)，之解法，可參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第五章 §5.6. 例 3.）

【解】先求不定積分 $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$ 。

令 $x = \sec \theta$, (應為 $\theta = \sec^{-1} x \in [0, \pi/2)$)，則 $dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta, \quad (\text{注意: } \theta \in [0, \pi/2)) \\
&= \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|) - \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\
&\quad (\text{見下方之 } \star) \\
&= \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta - \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\
&= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.
\end{aligned}$$

故所求之面積為

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_1^a \sqrt{x^2 - 1} dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \right]_1^a \\
&= \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln (a + \sqrt{a^2 - 1}).
\end{aligned}$$

($\star$) 利用 by part, 令 $u = \sec \theta$, $dv = \sec^2 \theta d\theta$, 則 $du = \sec \theta \tan \theta d\theta$, $v = \tan \theta$,

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 \theta d\theta &= \sec \theta \tan \theta - \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \\
&= \sec \theta \tan \theta - \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta \\
&= \sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta.
\end{aligned}$$

左右兩端分別加以 $\int \sec^3 \theta d\theta$, 得

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|) + C.$$

♠ (20-7) 試求由曲線 $x^2 y^2 + 4x^2 - 4y^2 = 0$ 與其漸近線所圍成之面積。

分析 首先, 設法將隱函數化為顯函數, 其次找出其漸近線, 若能繪出草圖, 面積就可以求出。

【解】 原方程式可寫為 $(4 - x^2)y^2 = 4x^2$, 顯然 $x^2 \geq 4$ 為不可能, 故原方程式可移項而成

$$y^2 = \frac{4x^2}{4 - x^2}, \quad \forall x \in (-2, 2).$$

開方之，可得以下二函數

$$f_1(x) = y = \frac{2|x|}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \forall x \in (-2, 2), \quad (\text{上半})$$

$$f_2(x) = y = -\frac{2|x|}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \forall x \in (-2, 2), \quad (\text{下半})$$

其漸近線顯然為 $x = -2$ 及 $x = 2$ ，由於圖形對稱於二坐標軸，故面積為第一象限部分之四倍。

$$A = 4 \int_0^{2^-} \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[-4 \cdot \frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2} \right]_0^t = 16.$$

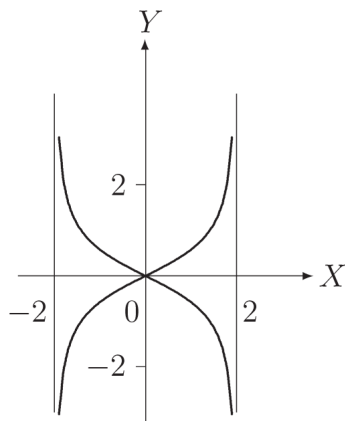


圖 20-6

♠ (20-8) 試求由曲線 $3y - x = 6$, $x + y = -2$, $x + y^2 = 4$ 所圍且含原點區域之面積。

分析 由於三方程式之一不為直線，為方便計，三者皆以曲線稱之。三曲線所圍之區域有三塊，只有一塊含有原點。

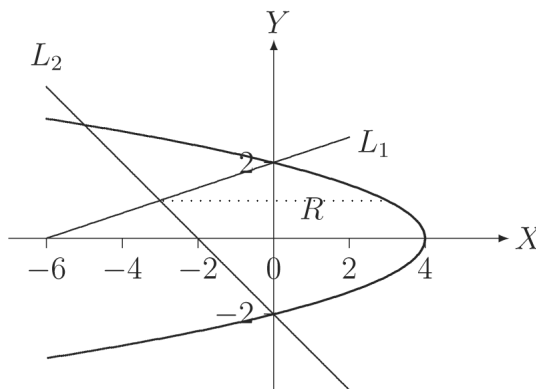


圖 20-7

【解】 為方便計令 L_1 表直線 $3y - x = 6$ ， L_2 表直線 $x + y = -2$ 。

1° 先求 L_1 與 L_2 之交點：

$$\begin{cases} 3y - x = 6 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

聯立之，解得 $(x, y) = (-3, 1)$ 。

2° 次求 L_1 與拋物線 $x + y^2 = 4$ 之交點：

$$\begin{cases} 3y - x = 6 \\ x + y^2 = 4 \end{cases}$$

二式相加得 $y^2 + 3y - 10 = 0$ ，解之得 $y = 2$ 或 $y = -5$ 。即二交點為 $(0, 2)$, $(-21, -5)$ 。

3° 最後求 L_2 與拋物線 $x + y^2 = 4$ 之交點：

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x + y^2 = 4 \end{cases}$$

二式相減得 $y^2 - y - 6 = 0$ ，解之得 $y = -2$ 或 $y = 3$ 。即二交點為 $(0, -2)$ ， $(-5, 3)$ 。

4° 設 R 為上述三曲線所圍且原點之區域，我們以直線 $y = 1$ （圖中虛線）將它分為上下二區域， R 之面積為

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-2}^1 (4 - y^2 - (-2 - y)) dy + \int_1^2 (4 - y^2 - (3y - 6)) dy \\ &= \frac{27}{2} + \frac{19}{6} = \frac{50}{3}. \end{aligned}$$

● 體積

♠ (20-9) 設半徑為 r 之一球體，挖去半徑為 a 而其中央穿過球心的圓孔。試求 a 以使其餘部分之體積為原球體積的一半。

分析 先以殼法求出所餘部分之體積，再令其為球體積之半以求 a 值。

【解】 利用殼法知上述立體 S 體積為

$$\begin{aligned} V(S) &= 2 \int_a^r 2\pi x \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= 2\pi \int_a^r (r^2 - x^2)^{1/2} (2x dx) \\ &= 2\pi \left[-\frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{3/2} \right]_a^r = \frac{4\pi}{3} (r^2 - a^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

由題意知

$$\begin{aligned} V(S) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \Leftrightarrow (r^2 - a^2)^{3/2} = \frac{1}{2} \cdot r^3 \\ &\Leftrightarrow r^2 - a^2 = r^2 (1/2)^{2/3} \\ &\Leftrightarrow a = r \sqrt{1 - 4^{-1/3}}. \end{aligned}$$

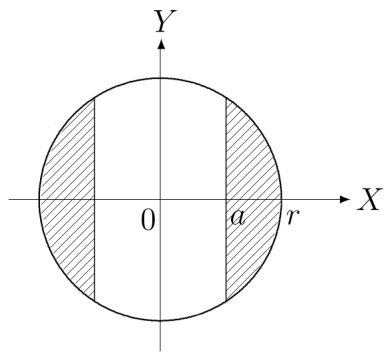


圖 20-8

♠ (20-10) 設 f 為一連續函數，已知 $\forall a \geq 0$ ，曲線 $y = f(x)$ 與 X 軸、 Y 軸及直線 $x = a$ 所圍區域繞 X 軸迴轉所得立體之體積為 $a^2 + a$ ，試求函數 f 。

分析 通常我們由已知函數以求其繞 X 軸之體積，我們利用積分中之微積分基本定理第二型，本題則是利用積微積分基本定理第一型，對積分式微分之。

【解】由於立體之體積與 a 有關，故視其為 a 之函數，以切片法表之，由題意知

$$\forall a \geq 0, \int_0^a \pi f^2(x) dx = a^2 + a.$$

利用微積分基本定理第一型，上式左右兩端分別對 a 微分之，得

$$\pi f^2(a) = 2a + 1,$$

是以 $f(a) = \pm \sqrt{\frac{2a+1}{\pi}}$ ，換言之，

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{\pi}} \text{ 或 } -\sqrt{\frac{2x+1}{\pi}}.$$

註：本題若無條件「 f 為一連續函數」之限制，則其答案有無限多種，例如：

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2x+1}{\pi}}, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{\frac{2x+1}{\pi}}, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$$

♠ (20-11) 以 $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 1)$ 為頂點之三角形區域繞 X 軸迴轉所得立體，其體積為何？

分析 繪圖並求出三點連線之函數以便積分。

【解】 $(2, 1)$, $(0, 2)$ 連線之函數為

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = -\frac{x}{2} + 2,$$

$(1, 0)$, $(0, 2)$ 連線之函數為

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = -2x + 2,$$

$(1, 0)$, $(2, 1)$ 連線之函數為

$$h: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = x - 1,$$

是以所求之體積為

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx + \pi \int_1^2 \left(f^2(x) - h^2(x) \right) dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(\left(2 - \frac{x}{2} \right)^2 - (2 - 2x)^2 \right) dx + \pi \int_1^2 \left(\left(2 - \frac{x}{2} \right)^2 - (x - 1)^2 \right) dx \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

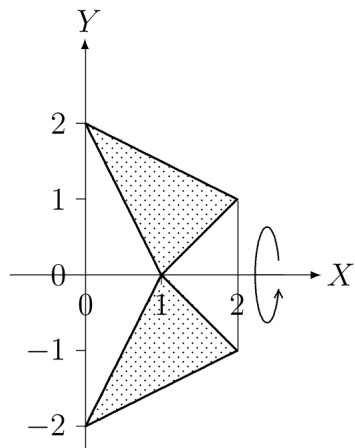


圖 20-9

♠ (20-12) 試求由半徑為 r 之二圓柱體垂直相交，其共同部分之體積。

分析 本題之困難在於如何將該交集部分繪製出來，並了解其剖面為一正方形。

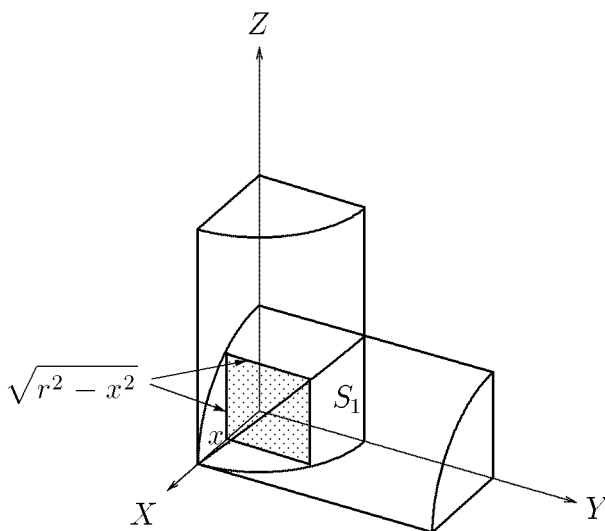


圖 20-10

【解】設一圓柱之軸為 Y 軸，另一圓柱之軸為 Z 軸，其相交部分之立體為 S 。為方便計先討論 S 在第一卦限部分，設其為 S_1 (如圖)。由於垂直 X 軸於點 x 與 S_1 之截面為一邊長為 $\sqrt{r^2 - x^2}$ 之正方形。故

$$\begin{aligned} A: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}: A(x) &= \text{垂直於 } X \text{ 軸在點 } x \text{ 與 } S_1 \text{ 之截面積} \\ &= (\sqrt{r^2 - x^2})^2 = r^2 - x^2. \end{aligned}$$

故

$$V(S) = 8V(S_1) = 8 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{16r^3}{3}.$$

♠ (20-13) 試求平面上區域 $R = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, 1 \leq x \right\}$ 之面積，並求 R 對 X 軸迴轉所得之立體 S 的體積。

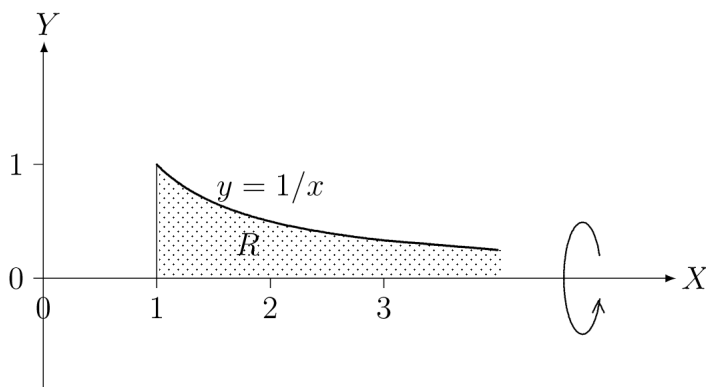


圖 20-11

分析 許多初學者對於 R 之面積為無限大，但 S 之體積為有限，表示難以理解，原因在於 $1/x$ 和 $1/x^2$ 在區間 $[1, +\infty)$ 之瑕積分的斂散性不同。

【解】 (a) R 之面積為

$$A(R) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty.$$

(b) R 對 X 軸迴轉之立體 S 的體積為

$$V(S) = \int_1^{+\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\pi}{x^2} dx = \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \pi.$$

♠ (20-14) 從半徑 R 的圓上割去一個扇形，把剩下的部分圍成一個圓錐，試求割去扇形的角度為多少時，所作的圓錐體積最大？

分析 我們需要將圓錐體之體積表為圓錐高 h 之函數，設法找到使體積為最大之 h 值，最後再換算角度大小。

【解】 設割去扇形之角度為 θ ，則

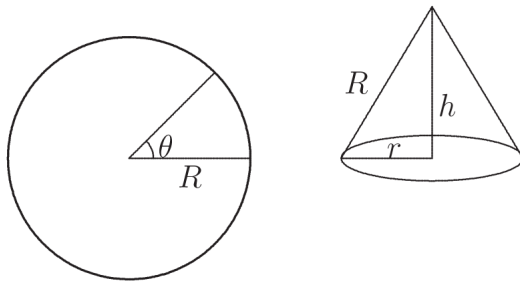


圖 20-12

- 割去後之週長為 $2\pi R - R\theta = R(2\pi - \theta)$; (*)
- 設圍成之圓錐體之高為 h ，則其底半徑為 $r = \sqrt{R^2 - h^2}$;
- 圓錐體積 $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(R^2 - h^2)h$ ， $0 < h < R$ 。由於

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2) \begin{cases} > 0, & \text{若 } h < \frac{R}{\sqrt{3}}, \\ = 0, & \text{若 } h = \frac{R}{\sqrt{3}}, \\ < 0, & \text{若 } h > \frac{R}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

故知當 $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ 時，體積 V 為最大，此時，

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} R,$$

由 (*) 知 θ 應滿足 $(2\pi - \theta)R = 2\pi r$, 即

$$\theta = 2\pi - \frac{2\pi r}{R} = 2\pi - \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \approx 66^\circ.$$

♠ (20-15) 試求擺線 (cycloid) $\begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$, 與 X 軸所圍區域繞 X 軸迴轉所得立體之體積.

分析 我們需要參數方程之切片法體積公式: $V(S) = \int_a^b \pi y^2(t) |x'(t)| dt$, 其中 $[a, b]$ 為積分區間. (擺線圖形參見第 9 單元 (9-9) 題.)

【解】 利用切片法: 繞 X 軸迴轉所得立體之體積:

$$\begin{aligned} V(S) &= \int_0^{2\pi} \pi y^2(t) |x'(t)| dt \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t) dt \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3(1 + \cos 2t)}{2} - \cos^3 t \right) dt \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \frac{5}{2} dt, \quad (\text{見 } (*)) \\ &= 5\pi^2. \end{aligned}$$

(*) 因為以下三積分皆為 0.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos t dt &= 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \sin t dt = 0. \end{aligned}$$

● 弧長

♠ (20-16) 設 $a < b$, A 為直線 $x = a$, $x = b$, $y = 0$ 與曲線 $y = \cosh x$ 所圍區域之面積, 而 L 為曲線 $y = \cosh x$ 在 $x = a$ 與 $x = b$ 間的弧長, 試證: $A = L$.

分析 本題只需弧長和面積公式, 計算十分簡單. 雖然 A 與 L 二者之值相等, 但二者單位不同.

【解】設 $f(x) = \cosh x$ ，則弧長

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_a^b \cosh x dx \\ &= \sinh x \Big|_a^b = \sinh b - \sinh a. \end{aligned}$$

$$\text{而面積則爲 } A = \int_a^b \cosh x dx = \sinh x \Big|_a^b = \sinh b - \sinh a = L.$$

♠ (20-17) 試求參數曲線 $x = 32t$, $y = 16t^2 - 4$ 上，自 $t = 0$ 至 $t = 2$ 之曲線長。

【分析】如果我們將參數消去，則得拋物線 $y = ax^2 + b$ 型式，此類函數之弧長計算皆相似，會有不定積分 $\int \sqrt{1 + x^2} dx$ 的問題，解法須利用三角代換（或雙曲代換），計算上有一點點麻煩。

【解】由於

$$\begin{cases} x = 32t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 32, \\ y = 16t^2 - 4 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 32t. \end{cases}$$

是以所求之弧長爲

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{32^2 + (32t)^2} dt \\ &= 32 \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= 32 \int_0^{\tan^{-1} 2} \sec^3 \theta d\theta, \quad (\text{令 } t = \tan \theta) \\ &= 16 \left[\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_0^{\tan^{-1} 2}, \quad (\text{不定積分見 (20-6) 題}) \\ &= 16(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})). \end{aligned}$$

♠ (20-18) 試求函數 $\exp x$ 圖形上自點 $(0, 1)$ 至點 $(1, e)$ 之弧長。

【分析】弧長問題之積分多半有點複雜，能解出之題目誠然不多，本題有點難，解法並不常見。

【解】首先，

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \exp x &\Rightarrow f'(x) = \exp x, \\ &\Rightarrow 1 + (f'(x))^2 = 1 + e^{2x}.\end{aligned}$$

是以所欲求之弧長為

$$\begin{aligned}L(s) &= \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\ &= \left[x - \ln |\sqrt{1 + e^{2x}} + 1| + \sqrt{1 + e^{2x}} \right]_0^1, \quad (\text{理由見 } (\star)) \\ &= 1 - \ln(\sqrt{1 + e^2} + 1) + \sqrt{1 + e^2} + \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

($\star$) 令 $e^x = \tan \theta$ ，則 $x = \ln(\tan \theta)$ ， $dx = \frac{\sec^2 \theta}{\tan \theta} d\theta$ ，是以

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx &= \int \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{\sec^2 \theta}{\tan \theta} d\theta \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \int \csc \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta \\ &= \int \csc \theta d\theta - \int \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= -\ln |\csc \theta + \cot \theta| + \sec \theta + C \\ &= -\ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^{2x}}}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right| + \sqrt{1 + e^{2x}} + C \\ &= x - \ln |\sqrt{1 + e^{2x}} + 1| + \sqrt{1 + e^{2x}} + C.\end{aligned}$$

♠ (20-19) 設蜘蛛沿曲線 $y = 7 - x^2$ 之最高點向下爬行，碰到 X 軸就向 X 軸正向前進，而蒼蠅停在點 $(4, 0)$ 處不動。當蜘蛛第一次看到蒼蠅時，始前往捕食。試問蜘蛛前往捕食之爬行路程的長為若干？

分析 這是弧長的應用題，分兩個步驟：其一，先找到過點 $(4, 0)$ 拋物線的切線和切點，其二，由切點到 X 軸之弧長加上最後一小段。

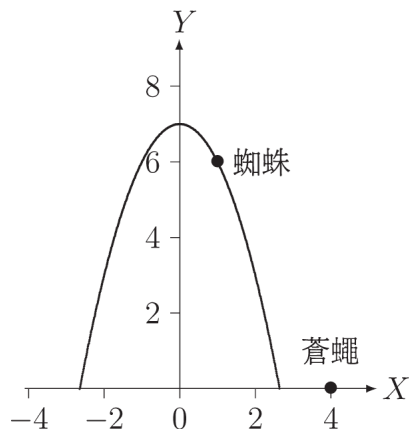


圖 20-13

【解】1° 蜘蛛在切點 (a, b) 方可見到蒼蠅，故先求切點。由於導數應等於二點連線之斜率，即

$$-2a = \frac{b-0}{a-4} = \frac{7-a^2}{a-4}.$$

解之得 $a = 1$ 或 7 ，唯 a 應小於 4 ，故得切點為 $(1, 6)$ 。

2° 爬行路徑：自點 $(1, 6)$ 沿拋物線而下至點 $(\sqrt{7}, 0)$ ，再沿 X 軸至點 $(4, 0)$ ，長度共為

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\sqrt{7}} \sqrt{1+(-2x)^2} dx + (4 - \sqrt{7}) \\ &= \frac{1}{4} \left[2x\sqrt{1+4x^2} + \ln|\sqrt{1+4x^2} + 2x| \right]_1^{\sqrt{7}} + 4 - \sqrt{7}, \\ &\quad \text{(不定積分參考 20-17 題)} \\ &= \frac{\sqrt{203} - \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{29} + 2\sqrt{7}}{\sqrt{5} + 2} + 4 - \sqrt{7}. \end{aligned}$$

♠ (20-20) 試求函數 $\sin x$ 圖形上自點 $(0, 0)$ 至點 $(2\pi, 0)$ 之弧長。

【分析】本題看上去很簡單，但不定積分不易解出，網路上有一大堆人提出問題，有人直接說：不定積分 $\int \sqrt{1+\cos^2 x} dx$ 不存在。我們可利用電腦計算積分近似值。許多題目都是被設計好「可解出的」，使人誤以為每個弧長問題「應該」可由不定積分解出。

【解】利用電腦軟體，此弧長之近似值為

$$L(s) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 x} dx \approx 7.6404.$$

註：讀者如果以 Simpson 法則，令 $n = 14$ 以上，也可以得到上述結果。

● 迴轉曲面之面積

♠ (20-21) 試求函數 $\cosh$ 在區間 $[0, 1]$ 之圖形繞 X 軸迴轉所得曲面之面積。

【分析】我們對於三角函數之倍角公式十分熟悉，對於雙曲函數可能需要花時間去推導，

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1.$$

【解】所求之迴轉曲面 $\mathcal{S}$ 之面積為

$$\begin{aligned}
 A(\mathcal{S}) &= \int_0^1 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\
 &= \int_0^1 2\pi \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\
 &= \int_0^1 2\pi \cosh^2 x dx \\
 &= \pi \int_0^1 (1 + \cosh 2x) dx \\
 &= \pi \left(x + \frac{1}{2} \sinh 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} (4 + e^2 - e^{-2}).
 \end{aligned}$$

♠ (20-22) 試求橢圓 $3x^2 + 4y^2 = 3$ 繞 X 軸所得迴轉曲面之面積。

分析 不論弧長或迴轉曲面之面積，常會遇到被積函數中分母可能為 0 之問題，唯一的方法是以瑕積分方式處理之。值得注意的是：橢圓的迴轉面之面積可以求出，但橢圓之周長則是一大難題。

【解】由原設知，橢圓曲線之上半為函數 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - x^2}$ ，則

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \left(\frac{-\sqrt{3}x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)^2 = \frac{4-x^2}{4(1-x^2)}, \quad |x| < 1,$$

故所求迴轉曲面 $\mathcal{S}$ 之面積為

$$\begin{aligned}
 A(\mathcal{S}) &= 2 \cdot 2\pi \int_0^{1^-} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\
 &= \sqrt{3}\pi \int_0^{1^-} \sqrt{4-x^2} dx = \sqrt{3}\pi \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \\
 &= \sqrt{3}\pi \int_0^{\sin^{-1}(1/2)} 4 \cos^2 \theta d\theta, \quad (\text{令 } x = 2 \sin \theta) \\
 &= 4\sqrt{3}\pi \int_0^{\sin^{-1}(1/2)} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= 4\sqrt{3}\pi \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\sin^{-1}(1/2)} \\
 &= 4\sqrt{3}\pi \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}\pi}{6} (3\sqrt{3} + 2\pi).
 \end{aligned}$$

♠ (20-23)

- (a) 試證：半徑為 r 之球之表面積為 $4\pi r^2$ ；
 (b) 假設地球為一球形，試問北緯幾度以北之面積為全球面積的 $1/4$ 。

分析 利用半圓 $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, 繞 X 軸迴轉可得一球面，計算時兩端都是瑕積分，最好改為四分之一圓弧 $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$, 繞 X 軸迴轉可得一球面之半，再乘以 2 即可。至於 (b) 題，需要三個步驟，其一：設計為「繞 Y 軸」，其二：計算圓弧在區間 $[c, r]$ 之迴轉面積，其三：再由點 c 求出緯度。

【解】 (a) 設

$$f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

則 f 之圖形繞 X 軸旋轉形成半球形，是以半徑為 r 之球之表面積為

$$\begin{aligned} A(\mathcal{S}) &= 2 \int_0^{r^-} 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= 4\pi \int_0^{r^-} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi \int_0^{r^-} r dx = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

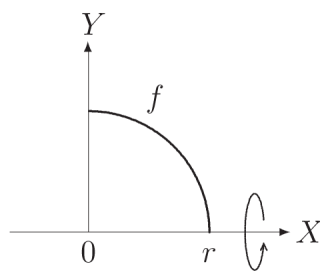


圖 20-14

- (b) 我們視地球表面為由函數

$$g(y) = \sqrt{r^2 - y^2}, \quad -r \leq y \leq r,$$

繞 Y 軸旋轉而成 (即右半圓繞 Y 軸旋轉)。

設 $0 < c < r$, 則自 c 至 r 部分之曲面面積為

$$\begin{aligned} A(c) &= \int_c^{r^-} 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy \\ &= 2\pi \int_c^{r^-} \sqrt{r^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{r^2 - y^2}} dy \\ &= 2\pi \int_c^{r^-} r dy = 2\pi r(r - c). \end{aligned}$$

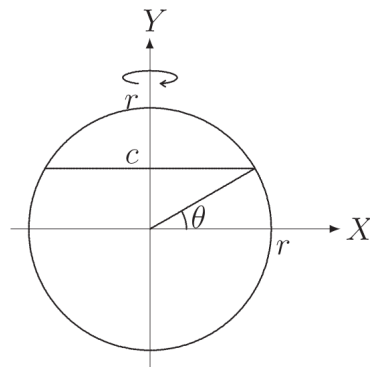


圖 20-15

由原設得方程式

$$2\pi r(r - c) = A(c) = \frac{(\text{地球表面積})}{4} = \pi r^2.$$

解之得 $c = \frac{r}{2}$. 由緯度之定義知

$$\sin \theta = \frac{c}{r} = \frac{1}{2},$$

是以 $\theta = 30^\circ$, 亦即北緯 30° 以北之表面積占地球表面積的四分之一.

● 其他

♠ (20-24)

- (a) 試求半徑為 r , 高為 h 之圓錐體之形心;
 (b) 試求上述圓錐體側面之形心.

分析 形心問題含平面區域之形心、曲線之形心、迴轉體之形心、迴轉曲面之形心, 公式皆不同, 讀者若有需要可參考拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第七章 §7.5.

【解】(a) 我們將圓錐之頂點置於原點, 其軸與 X 軸重合, 則此圓錐可視為由函數

$$f: [0, h] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{rx}{h}$$

之圖形繞 X 軸迴轉而得, 如下圖所示.

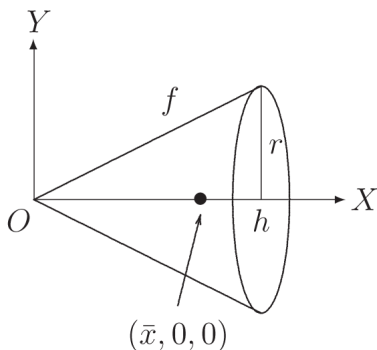


圖 20-16

是以此圓錐體之形心為 $(\bar{x}, 0, 0)$, 內

$$\bar{x} = \frac{\pi \int_0^h x f^2(x) dx}{\pi \int_0^h f^2(x) dx} = \frac{\pi \int_0^h \frac{r^2 x^3}{h^2} dx}{\pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2} dx} = \frac{h^4/4}{h^3/3} = \frac{3}{4}h.$$

- (b) 設圓錐仍如 (a) 題, 由於此側面 $\mathcal{S}$ 對 yz 平面之矩及 $\mathcal{S}$ 之面積分別為

$$M_{yz} = 2\pi \int_0^h x \cdot \frac{rx}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} dx = 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \cdot \frac{h^3}{3},$$

$$A(\mathcal{S}) = 2\pi \int_0^h \frac{rx}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} dx = 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \cdot \frac{h^2}{2},$$

是以 $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{A(S)} = \frac{2h}{3}$, 即 $(\frac{2h}{3}, 0, 0)$ 為圓錐側面 S 之形心.

- ♠ (20-25) 一半徑為 r , 高度為 L 之圓柱形油桶, 平放於地面上 (即二底面垂直於地面), 桶之上方開一口, 並以每秒 k 公升之速度注入汽油. 試問: 當油之高度為 h 時, ($0 < h < 2r$), 油上升之速度為若干?

分析 本題需要三個觀念, 第一: 關聯比率 (related rate), 第二: 旋轉體之體積, 第三: 微積分基本定理. 先利用旋轉體體積公式, 求出油之體積 V 與 h 之關係, 但不需解出積分值, 其次再對時間 t 微分之.

【解】 將圓心置於原點, 如圖.

1° 先求出體積與液面高度之關係,

$$V = 2L \int_{-r}^{h-r} \sqrt{r^2 - y^2} dy.$$

2° 由題意知

$$k = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = 2L \sqrt{r^2 - (h-r)^2} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

移項之, 得

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k}{2L \sqrt{r^2 - (h-r)^2}} = \frac{k}{2L \sqrt{2hr - h^2}},$$

其中 $0 < h < 2r$.

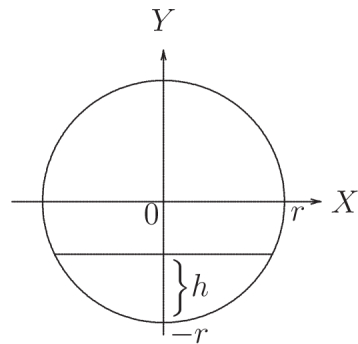


圖 20-17

- ♠ (20-26) 試求由曲線 $y = x^2$ 與 $y = x + 2$ 所圍區域 R 之形心. 並進而求 R 繞 $y = x + 2$ 旋轉所成之立體的體積.

分析 本題需利用 Pappus 定理, 以 R 之面積乘以「形心繞旋轉軸一周之周長」即為旋轉所成之立體的體積.

【解】 1° 先求交點, 由

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{2, -1\}. \end{aligned}$$

知二曲線之交點為 $(-1, 1)$, $(2, 4)$.

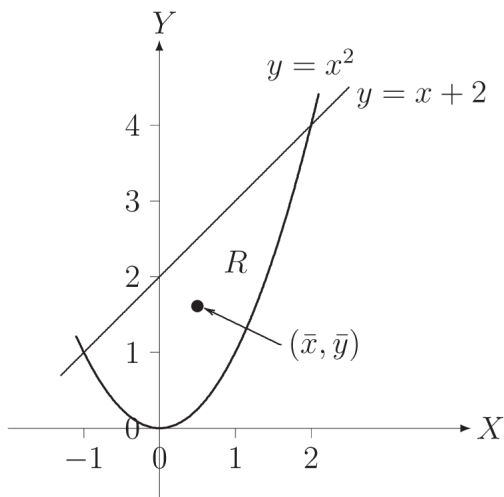


圖 20-18

2° 由於 R 之面積、對 y 軸及對 x 軸之矩分別為：

$$A(R) = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \frac{9}{2},$$

$$M_y = \int_{-1}^2 x(x + 2 - x^2) dx = \frac{9}{4},$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x + 2 + x^2)(x + 2 - x^2) dx = \frac{36}{5},$$

故

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A(R)} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A(R)} = \frac{8}{5}.$$

即 R 之形心為 $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right)$.

3° 次求形心與直線 $y = x + 2$ 之距離。已知點 (x_0, y_0) 與直線 $ax + by + c = 0$ 之距離公式為

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

在此， $a = 1$ ， $b = -1$ ， $c = 2$ ， $x_0 = \bar{x} = 1/2$ ， $y_0 = \bar{y} = 8/5$ ，故

$$d = \frac{|\bar{x} - \bar{y} + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{8}{5} + 2}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{20}.$$

由 Pappus 定理得所求之體積為

$$V(S) = A(R) \cdot 2\pi d = \frac{9}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{9\sqrt{2}}{20} = \frac{81\sqrt{2}\pi}{20}.$$

3° 由上述二點知 $\{a_n\}_n$ 為收斂。最後求其極限：令 $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ，應有

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{a_n} \\ &\Rightarrow l = 2\sqrt{l} \Rightarrow l = 4, \quad (\text{見下註}) \end{aligned}$$

註： l 不可能為 0，因 $\{a_n\}_n$ 為遞增。

♠ (21-3) 試問序列 $\{\sin n\}_{n \geq 1}$ 是否為收斂？

分析 證明一序列不為收斂常比證其為收斂困難，常用的技巧是找到二不同制限 (restriction)，並證明在其上之極限不同，而本題更難，必須利用矛盾證法。

【解】 矛盾證法。假定 $\{\sin n\}_{n \geq 1}$ 為收斂，令 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n = l$ 。

- 由於區間 $[\pi/4, 3\pi/4]$ 之長度大於 1，故其中必有一自然數，
- 由於區間 $[5\pi/4, 7\pi/4]$ 之長度大於 1，故其中必有一自然數。

令

$$\begin{aligned} A &= \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq n \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \right\}, \\ B &= \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \leq n \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

則

1° A 與 B 均為無上界；

2° $\forall n \in A, \sin n \geq \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；

3° $\forall n \in B, \sin n \leq \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

因 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n = l$ ，故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin|_A(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin|_B(n) = l$ ，因此，

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin|_A(n) = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin|_B(n) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

矛盾。故知 $\{\sin n\}_{n \geq 1}$ 不為收斂。

♠ (21-4) 設函數 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足 $|f(x) - f(y)| \leq 5|x - y|$ ， $\forall x, y \in (a, b)$ 。試證：

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ 皆存在。

分析 本題需使用「Cauchy 序列必為收斂」之觀念，稍為超出初等微積分之程度，證明方法亦為「數學分析」手法。

【證】只證 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在； $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ 之存在性同理可證。

1° 設 $\{x_n\}_n$ 爲一遞減序列，且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ ，則 $\{x_n\}_n$ 爲一 Cauchy 序列，又因

$$|f(x_n) - f(x_m)| < 5|x_n - x_m|, \quad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

故知 $\{f(x_n)\}_n$ 爲一 Cauchy 序列，是以存在 $L \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$ 。

2° 我們將以反證法證明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

“ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ” 不真

$$\Rightarrow \exists \epsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad (\exists x)(a < x < a + \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon)$$

$$\Rightarrow \exists \epsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\exists x_n)\left(a < x_n < a + \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - L| \geq \epsilon\right),$$

(令 $\delta = 1/n$)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq L$$

$\Rightarrow$ 與 1° 之結果相矛盾。

♠ (21-5) 試利用『定義』證明：序列 $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}_n$ 爲收斂。

【分析】我們需要 “ $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ”。法一：有理化分子，法二：微分均值定理，考慮函數 $f(x) = \sqrt{x}$ 在區間 $[n, n+1]$ 上， $\exists c \in (n, n+1)$ 使得

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

【證】我們猜測 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ ，依題意應證明：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad (\forall n)(n > n_0 \Rightarrow |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \epsilon).$$

由於，

$$\begin{aligned} |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \epsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \epsilon, \quad (\text{有理化分子}) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{2\epsilon} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{4\epsilon^2}. \end{aligned}$$

若令 $n_0 = \left\lceil \frac{1}{4\epsilon^2} \right\rceil + 1$ ，則當 $n > n_0 > \frac{1}{4\epsilon^2}$ 時， $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \epsilon$ 。

♠ (21-6) 設 $a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 試證: $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

分析 本題除了以下證法之外, 亦利可用數學歸納法.

【證】 1° 由於 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \Rightarrow a_n^2 = a_n \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \right) \\ &< a_n \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n+1}{2n+2} \right) \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{n+1} \\ &\Rightarrow a_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

2° 同理,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \Rightarrow a_n^2 = a_n \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \right) \\ &> a_n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} \\ &\Rightarrow a_n > \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}$$

♠ (21-7) 若 $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 試證: 序列 $\{a_n\}_n$ 為收斂, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

分析 如果我們繪個圖, 當 $a_1 < a_2$ 時, 令 $l = a_2 - a_1$, 會發現

$$a_2 = a_1 + l, \quad a_3 = a_2 - \frac{l}{2}, \quad a_4 = a_3 + \frac{l}{4}, \quad \dots$$

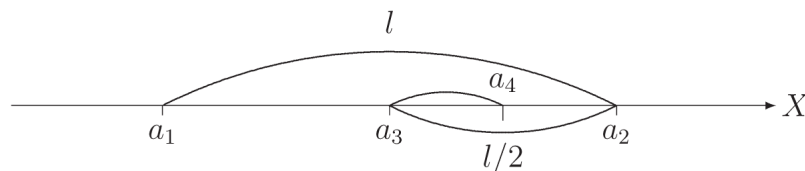


圖 21-1

當 $a_1 > a_2$ 時同理, 圖形由讀者自行補上.

【證】設 $l = a_2 - a_1$ ，則

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + l, \\ a_3 &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}(a_1 + a_1 + l) = a_1 + l - \frac{l}{2}, \\ a_4 &= \frac{1}{2}(a_2 + a_3) = \frac{1}{2}(a_1 + l + a_1 + l - \frac{l}{2}) = a_1 + l - \frac{l}{2} + \frac{l}{4}, \end{aligned}$$

利用數學歸納法可證明： $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) = a_1 + l - \frac{l}{2} + \frac{l}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{l}{2^n},$$

是以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= a_1 + l \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \\ &= a_1 + \frac{l}{1 + \frac{1}{2}} \\ &= a_1 + \frac{2l}{3} \\ &= a_1 + \frac{2}{3}(a_2 - a_1) = \frac{a_1 + 2a_2}{3}. \end{aligned}$$

♠ (21-8) 設

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}, \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots$$

試問序列 $\{a_n\}_{n \geq 2}$ 是否為收斂？若是，則求其極限。

分析 繪圖對於解題有很大的幫助。

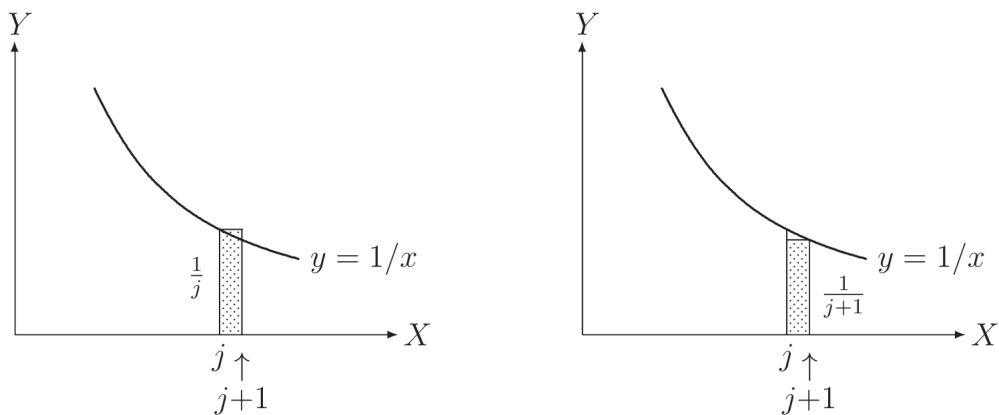


圖 21-2

【解】 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上為遞減

$$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}, \int_j^{j+1} \frac{1}{j+1} dx < \int_j^{j+1} \frac{1}{x} dx < \int_j^{j+1} \frac{1}{j} dx, \quad (\text{參閱上圖})$$

$$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}, \frac{1}{j+1} < \ln(j+1) - \ln j < \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} < \ln n < \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}, \quad (\text{不等式三部分之前 } n-1 \text{ 項和之})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}} < \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} < \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} < \frac{1}{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}} + 1.$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}} + 1 \right) = 1$, 是以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

[註] 我們知道 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$.

● 級數

♠ (21-9)

(a) 試問級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}$ 是否為收斂?

(b) 試證: $\frac{3\pi^2}{32} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2} \leq \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi^2}{32}$.

分析 討論本正項級數之斂散性, 可利用積分審斂法; 至於其值之上下界, 則利用積分之保序性, 過程參考上題.

【解】(a) 我們將利用積分審斂法證明此級數為收斂. 為此, 令

$$g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2},$$

則

$$1^\circ \quad \forall x \geq 1, \quad g(x) \geq 0, \quad \text{且} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) = \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2};$$

2° $\forall x \geq 1, g'(x) = \frac{1 - 2x \tan^{-1} x}{(1 + x^2)^2} < 0$, 知 g 為遞減;

3° 而積分

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \tan^{-1} x d(\tan^{-1} x) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (\tan^{-1} x)^2 \Big|_1^t = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{3\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

是以原級數為收斂.

(b) 在 (a) 題之解中, 我們已知 $g(x) = \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2}$ 為遞減, 且 $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \frac{3\pi^2}{32}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} g(x) dx \leq \int_n^{n+1} g(n) dx = g(n).$$

是以 $\int_1^{+\infty} g(x) dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g(n)$, 故左端不等式成立.

同理, $\forall n \in \mathbb{N}, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(x) dx$, 和之,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(n) = g(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} g(n+1) \leq g(1) + \int_1^{+\infty} g(x) dx = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi^2}{32},$$

亦即右端不等式亦成立.

♠ (21-10) 試判斷級數 $\frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln 3}{9} + \cdots + \frac{\ln n}{n^2} + \cdots$ 之斂散性.

分析 本題若以比值審法 (ratio test) 或根值審法 (root test) 都行不通, 但我們可利用比較審法 (comparison test) 或積分審斂法 (integral test).

【解】法一: 利用比較審法 (comparison test), 由於

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-1}}{\frac{1}{2} x^{-1/2}}, \quad (\text{l'Hospital 規則}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^{-1/2} = 0. \end{aligned}$$

是以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 0, \quad (\text{註})$$

但已知 p 級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 為收斂, 故原級數亦為收斂.

註: 有人認為可以在此處直接以 l'Hospital 規則處理, 然而 n 為自然數, 界定在自然數系之函數不可以微分, l'Hospital 規則不可直接使用.

法二：利用積分審法(integral test)，令

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

則

$$1^\circ \quad \forall x \in [2, +\infty), \quad g(x) > 0;$$

$$2^\circ \quad \forall x \in [2, +\infty),$$

$$g'(x) = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} < 0,$$

故知 g 為遞減函數；

$$3^\circ \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad g(n) = \frac{\ln n}{n^2}.$$

4° 由於

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} g(x) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{\ln x}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_2^t = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故知原級數為收斂。

♠ (21-11) 設 $a_n > 0$ ，且級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 為收斂，試證：級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k$ 為收斂，其中 k 為大於 1 之常數。

分析 應分二步驟，其一，收斂級數的「小尾性」(即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$)，其二，利用比較審斂法。

【證】

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 為收斂} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \\ &\Rightarrow (\text{對於 } \epsilon = 1) \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n)(n > n_0 \Rightarrow |a_n| < 1) \\ &\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n)(n > n_0 \Rightarrow 0 < a_n^k < a_n) \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k \text{ 為收斂, } \left(\because \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 為收斂.} \right) \end{aligned}$$

♠ (21-12) 試討論級數 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$ ，內 $0 < p < q$ ，之斂散性。

分析 本級數之各項皆為負值，先提出負號，僅考慮正項級數，再與級數 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q^k}$ 相比較，利用比較審斂法以得結論。

【解】首先 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k - q^k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q^k - p^k}$ ，其次，我們將以比較審法討論正項級數 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q^k - p^k}$ 之斂散性，由於

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{q^k - p^k}}{\frac{1}{q^k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^k} = 1, \quad (*)$$

而 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q^k}$ 為公比等於 $\frac{1}{q}$ 之等比級數，其為收斂之充要條件為 $0 < \frac{1}{q} < 1$ ，由 (*) 式知原級數為收斂之充要條件為 $q > 1$ 。

♠ (21-13) 試證：若 $a_n \geq 0$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 為收斂，則 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 亦為收斂。

【分析】若能看到 $\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 為 a_n 與 $\frac{1}{n^2}$ 之幾何平均，利用算幾不等式及比較審斂法即可證明本題。

【證】由算幾不等式知，

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{n^2} \right),$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 與 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 皆為收斂，是以知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 亦為收斂。

♠ (21-14) 試判別交錯級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n e^{-n}$ 為絕對收斂、條件收斂或發散？

【分析】交錯級數若為絕對收斂，則其必為收斂，無需再使用 Leibniz 審斂法。

【解】令 $a_n = (-1)^n n e^{-n}$ ，則因 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$ ，是以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} e^{-1} = e^{-1} < 1,$$

利用根值審斂法知原級數為絕對收斂。

♠ (21-15) 設 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 為奇數,} \\ \frac{1}{(n-1)n}, & \text{若 } n \text{ 為偶數.} \end{cases}$

試判別交錯級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 為絕對收斂、條件收斂或發散？

分析 不少人以為交錯級數若具「小尾性」，即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ，則必為收斂，本題是一個反例。

【解】 設 s_n 為此級數之 n 項部分和，則

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j-1} a_j \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n-1)(2n)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = +\infty$ ，故知原級數為發散。

♠ (21-16) 設交錯級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 滿足：

- 1° $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ ；
- 2° $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n$ ；
- 3° $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 。

試證： $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ ，其中 s, s_n 分別為此交錯級數之和及部分和。

分析 由 Leibniz 審斂法知此級數為收斂，而 $s - s_n$ 為原級數截去前 n 項，故亦為收斂。

【解】 由於

$$\begin{aligned} s &= a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + (-1)^{n+2} a_{n+1} + \cdots, \\ s_n &= a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n. \end{aligned}$$

是以 $s - s_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + (-1)^{n+4} a_{n+3} + \cdots$,

$$\begin{aligned} |s - s_n| &= |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - \cdots| \\ &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - \cdots, \\ &\quad (\because a_{n+1} - a_{n+2} \geq 0, a_{n+3} - a_{n+4} \geq 0, \cdots) \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \\ &\leq a_{n+1}, \quad (\because \text{括號內各項皆為非負.}) \end{aligned}$$

♠ (21-17) 設 $S_0 = 1$, $S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n(n+2)}$, $\forall n \geq 1$.

(a) 試求 $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 之值.

(b) 試求最小之自然數 n 以使 $|S_n - S| < \frac{1}{1000}$.

分析 (a) 先化簡 S_n 再求極限. (b) 利用逆推法.

【解】 (a) 由於

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j(j+2)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left[\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots - \frac{(-1)^{n-2}}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+2} \right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+2} \right). \end{aligned}$$

是以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 0 + 0 \right) = \frac{3}{4}.$$

(b) 由

$$\begin{aligned} |S - S_n| < 10^{-3} &\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)(n+3)} < 10^{-3}, \quad (\text{理由見上題}) \\ &\Leftrightarrow n^2 + 4n + 3 > 1000 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 4n - 997 > 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{-4 + \sqrt{16 + 3988}}{2} \approx 29.639 \\ &\Leftrightarrow n \geq 30, \end{aligned}$$

知當 $n \geq 30$ 時, $|S - S_n| < 10^{-3}$.

① 與 ② 相加，則知原級數收斂於 $\sin x + \cos x$ ， $\forall x \in \mathbb{R}$ 。此外，冪級數於收斂區間之內部皆為解析，故此函數亦為解析。

♠ (22-2)

- (a) 試求函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在點 1 之 Taylor 級數及其收斂區間；
 (b) 上述函數 f 在點 1 是否為解析 (analytic)？為何？

分析

先求 f 在點 1 之 Taylor 級數後，即可發現其為一等比級數。

【解】(a) 由

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-1}, \\ f'(x) &= -x^{-2}, \\ f''(x) &= 2! x^{-3}, \\ f'''(x) &= -3! x^{-4}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n n! x^{-(n+1)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

知 f 之 Taylor 級數為

$$\begin{aligned} T_f(x) &= 1 + \frac{-1}{1!}(x-1) + \frac{2!}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{n!}(x-1)^n + \cdots \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots + (-1)^n (x-1)^n + \cdots \end{aligned}$$

此顯為一等比級數，公比為 $-(x-1)$ 。已知等比級數收斂之充要條件為公比之絕對值小於 1，而

$$|-(x-1)| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2,$$

是以收斂區間為 $(0, 2)$ 。

- (b) 由於 $\forall x \in (0, 2)$ ，(此乃點 1 之一鄰近)，

$$\begin{aligned} T_f(x) &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots + (-1)^n (x-1)^n + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - (1-x)}, \quad (\text{等比級數之和}) \\ &= \frac{1}{x} = f(x). \end{aligned}$$

是以 f 在點 1 為解析。

♠ (22-3) 試證： $\sin^{-1}$ 在點 0 為解析的，並寫出其 Maclaurin 級數。

分析 我們可經由 $\sin^{-1} x$ 之一、二、三階導數而歸納出 n 階導數，進而求後其 Macalurin 級數，但證明此一 Macalurin 級數等於 $\sin^{-1} x$ 並不容易。它需要利用 $\sin^{-1} x$ 之一階導數 $(1-x^2)^{-1/2}$ ，套用「二項級數」再加以積分。

【解】 1° 由於

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

我們將利用冪級數之積分法，首先在拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第八章 §8.8 例 6，已證明以下「二項級數」，若 $a \neq 0$ ，則 $\forall x \in (-1, 1)$ ，

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots \quad (\star)$$

$$\text{內 } \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

2° 在 $(\star)$ 中，以 $-x^2$ 代 x ，以 $-1/2$ 代 a ，則當 $|x| < 1$ 時，

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-1/2} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^2)^2 + \cdots + \binom{-1/2}{n}(-x^2)^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} x^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

3° 利用冪級數積分法， $\forall x \in (-1, 1)$ ，

$$\begin{aligned} \sin^{-1} x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \\ &= \int_0^x \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} t^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n} + \cdots\right) dt \\ &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \end{aligned}$$

此為 $\sin^{-1}$ 之 Maclaurin 級數，又因 $(-1, 1)$ 為點 0 之一鄰近，故知 $\sin^{-1}$ 為解析的。

♠ (22-4) 試判別級數是 $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)0.5^n$ 否為收斂？若為收斂，試求其和。

分析 將等比級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ 予以微分二次，其通項會出現 $n(n-1)x^{n-2}$ ，再設法解決。

【解】利用冪級數微分法， $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow (1-x)^{-2} = D \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &\Rightarrow 2(1-x)^{-3} = D(1-x)^{-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \\ &\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)0.5^{n-2} = 2 \cdot (1-0.5)^{-3} = 16, \quad (\text{令 } x = 0.5) \\ &\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)0.5^n = 0.5^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)0.5^{n-2} = 4. \end{aligned}$$

♠ (22-5) 試證：若 $-1 < x \leq 1$ ，則

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

【分析】應分別就 $-1 < x < 1$ 及 $x = 1$ 二情況加以證明。

【解】1° 等比級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$ ，當公比 $-x$ 之絕對值小於 1 時，為收斂，亦即 $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n.$$

利用冪級數之積分定理， $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-t)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots. \end{aligned}$$

2° 次證：當 $x = 1$ 時，

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

為此考慮 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \ln(1+x)$ 。由於 f 為任意階可微分，故 f 之 Maclaurin 展開式為 $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $\exists c \in (0, 1)$ 使得

$$f(1) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + R_n, \quad (\star)$$

其中餘項 $R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n}$, 顯然 $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, (*) 式兩端取極限 $n \rightarrow \infty$, 則

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots.$$

註：另一種證明方法是利用 Abel 定理，它通常出現在《高等微積分》，由於 1° 我們已證得： $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

而且級數

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

為收斂，因此

$$\begin{aligned} \ln(1+1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (\text{Abel 定理}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots. \end{aligned}$$

♠ (22-6) 設函數 $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$.

- (a) 試求 f 之 n 階 Maclaurin 公式及其 n 次 Maclaurin 多項式。
 (b) 試求 f 之 Maclaurin 級數，並問 f 在點 0 是否為解析？為何？

分析 如果不能完全清楚分辨 Maclaurin 公式、Maclaurin 多項式及 Maclaurin 級數，請參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第四章 §4.1 及第八章 §8.7.

【解】(a) 由

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{-1} + (1-x)^{-1}, \\ f'(x) &= -(1+x)^{-2} + (1-x)^{-2}, \\ f''(x) &= 2!(1+x)^{-3} + 2!(1-x)^{-3}, \\ f'''(x) &= -3!(1+x)^{-3} + 3!(1-x)^{-3}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)} + n! (1-x)^{-(n+1)}, \end{aligned}$$

得 $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 \cdot 2!$, $f'''(0) = 0$, $\dots$,
 $f^{(n)}(0) = (-1)^n n! + n!$. 是以 f 之 n 階 Maclaurin 公式為

$$f(x) = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots + ((-1)^{n-1} + 1)x^{n-1} \\ + ((-1)^n(1+c)^{-(n+1)} + (1-c)^{-(n+1)})x^n, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

內 $c \in (0, x)$ or $(x, 0)$. 而 f 之 n 次 Maclaurin 多項式為

$$P_n(x) = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots + ((-1)^n + 1)x^n.$$

(b) 由 (a) 知, f 之 Maclaurin 級數為

$$T_f(x) = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots + ((-1)^n + 1)x^n + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

但由等比級數觀念知

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1), \\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

是以

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots = T_f(x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

此乃說明 f 於點 0 為解析.

♠ (22-7) 試求 $\ln \frac{1+x}{1-x}$ 之 Maclaurin 級數表示法, 並寫出收斂區間.

分析 所謂 Maclaurin 級數表示法, 乃指此函數與其 Maclaurin 級數在點 0 之某鄰近相等.
 另外, 本題和上題有某些關聯.

【解】 由於

$$D \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2},$$

我們先將上式右端展為冪級數, 再利用冪級數之積分定理. 由等比級數和之公式

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + \dots + t^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}, \quad \forall t \in (-1, 1).$$

知 $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = 2 \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} dt \\ = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right).$$

對於冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ，因

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{2x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}} \right| = x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1,$$

知當 $x \in (-1, 1)$ 時，冪級數為絕對收斂。至於區間之端點，

- 當 $x = 1$ 時， $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$ 為發散，（因為 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2n+1}{1}} = \frac{1}{2}$ ）；
- 當 $x = -1$ 時， $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1}$ 同理亦為發散，故收斂區間為 $(-1, 1)$ 。

♠ (22-8) 試求當 $x \in (-1, 1)$ ，級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 之和。

分析 將級數微分後發現它是等比級數，再積分回來。另外，利用 (22-5) 題亦可。

【解】 令

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

則因

$$\begin{aligned} f'(x) &= D \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} D \frac{(-1)^n}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} -(-x)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{1+x}, \quad (\text{公比為 } -x \text{ 之等比級數之和}). \end{aligned}$$

知存在常數 C 使得

$$f(x) = -\int \frac{dx}{1+x} = -\ln|1+x| + C = -\ln(1+x) + C. \quad (\star)$$

但 $f(0) = 0$ ，故知 $C = 0$ ，由 $(\star)$ 式得 $f(x) = -\ln(1+x)$ 。

♠ (22-9) 試求級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n} + 5}$ 之收斂範圍。

分析 本題之級數並非冪級數，它屬於「函數級數」，不可使用冪級數之係數之比值法或根值法，但可以直接利用比值法以求其收斂範圍。

【解】1° 若 $|x| = 1$, 則因

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2n} + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \neq 0,$$

級數不具小尾性 (亦稱通項極限判別法), 是為發散.

2° 若 $|x| < 1$, 則因

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2n} + 5} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

級數不具小尾性, 是為發散.

3° 若 $|x| > 1$, 令 $a_n = \frac{1}{x^{2n} + 5}$, 由於

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^{2n+2} + 5}}{\frac{1}{x^{2n} + 5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n} + 5}{x^{2n+2} + 5} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x^{2n}}}{x^2 + \frac{5}{x^{2n}}} = \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

由比值審斂法 (ratio test) 知: 上述極限值小於 1 時, 級數為收斂, 故知級數於 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 為收斂.

綜合以上三點知此級數僅於集合 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 為收斂.

♠ (22-10)

- (a) 試求 $\exp(-x)$ 之 n 階 Maclaurin 展開式及 Maclaurin 級數.
 (b) 試問以下陳述是否為真?

$$\forall x > 0, \quad \frac{x^8}{8!} - \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots > 0.$$

詳細說明理由.

【分析】其實 (a) 題是 (b) 題的準備, 解出 (a) 題後二者相減即可證得 (b) 題.

【解】(a) 由於 $f(x) = e^{-x}$, $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $\dots$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, 故 f 之 n 階 Maclaurin 展開式為

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n e^{-c}}{n!} x^n, \quad \textcircled{1}$$

其中 c 介於 0 與 x 之間.

吾人已知

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

以 $-x$ 代 x , 則得 e^{-x} 之 Maclaurin 級數:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

(b) 由 (2),

$$\begin{aligned} \frac{x^8}{8!} - \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots &= e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^7}{7!}\right) \\ &= \frac{(-1)^8 e^{-x}}{8!} x^8, \quad (\text{由 (1) 式, 令 } n=8) \\ &> 0, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

♠ (22-11) 試求冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} x^n$ 之收斂區間.

分析 本題需要上一單元 (21-6) 題不等式: $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

【解】 1° 令 $a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$, 則因

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+3)}}{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+2}{2n+3} = 1,$$

知此冪級數之收斂半徑為 1.

2° 其次, 當 $x=1$ 時, 級數 $= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, 由上一單元 (21-6) 題,

$$a_n > \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

但級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 為發散, (因 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$), 是以 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 為發散.

3° 當 $x=-1$ 時, 級數 $= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, 由於 $\{a_n\}_n$ 為遞減, 且由上一單元 (21-6) 題, $a_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 利用 Leibniz 審斂法知級數為收斂.

綜合上述三點知此冪級數之收斂區間為 $[-1, 1)$.

♠ (22-12) 試求冪級數 $\sum_{n=100}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-99)x^{n-100}$ 之收斂半徑.

分析 我們視 $a_n = n(n-1)\cdots(n-99)x^{n-100}$, $\forall n \geq 100$, 而利用比值審斂法, 檢視 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 是否小於 1.

【解】法一：由於 $\forall x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)n \cdots (n+1-99)x^{n+1-100}}{n(n-1)\cdots(n-99)x^{n-100}} \right| \\ = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-99} = |x|. \end{aligned}$$

故知當 $|x| < 1$ 時, 原級數為收斂, 而當 $|x| > 1$ 時, 原級數為發散, 是以此冪級數之收斂半徑為 1.

法二：利用冪級理論, (拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第八章定理 8.31.)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ 之收斂半徑為 } 1 \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \text{ 之收斂半徑為 } 1 \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \text{ 之收斂半徑為 } 1 \\ \vdots \\ \Rightarrow \sum_{n=100}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-99)x^{n-100} \text{ 之收斂半徑為 } 1. \end{aligned}$$

♠ (22-13) 設函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \leq 0, \\ \exp(-1/x), & \text{若 } x > 0, \end{cases}$

(a) 試求 f 之三階 Maclaurin 公式;

(b) f 在點 0 之附近是否可表為 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

分析 我們需要先求出 f 在點 0 之各階左右導數, 其中各階左導數沒有困難, 但各階右導數則有點麻煩.

【解】(a) 由於 $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-1/x}, \\ f'(x) &= x^{-2}e^{-1/x}, \\ f''(x) &= -2x^{-3}e^{-1/x} + x^{-4}e^{-1/x}, \\ f'''(x) &= 3!x^{-4}e^{-1/x} - 2x^{-5}e^{-1/x} + (-4x^{-5})e^{-1/x} + x^{-6}e^{-1/x} \\ &= (3!x^{-4} - 6x^{-5} + x^{-6})e^{-1/x}. \end{aligned}$$

利用 $f_+^{(k)}(p) = \lim_{x \rightarrow p^+} f^{(k)}(x)$ 公式, 當 $x \rightarrow 0^+$, 可得

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-2}}{e^{1/x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0.$$

同理, $f''_+(0) = f'''_+(0) = \cdots = 0$, 由原設知 $f'_-(0) = f''_-(0) = f'''_-(0) = \cdots = 0$, 故 f 在點 0 之各階導數皆為 0. 是以 f 之三階 Maclaurin 展開式為

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3, & \text{若 } x > 0, \text{ (內 } \exists c \in (0, x)) \\ 0 + 0 + 0 + 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x^3}{6}(6c^{-4} - 6c^{-5} + c^{-6}), & \text{若 } x > 0, \text{ (內 } \exists c \in (0, x)) \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) 不可! 因 $\forall x > 0$, f 在點 0 之各階導數皆為 0,

$$f(x) = e^{-1/x} > 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

♠ (22-14) 試求 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\lambda}^{2\lambda} \frac{e^{-x}}{x} dx$ 之值.

【分析】 利用冪級數之積分以及極限定理.

【解】 已知

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \cdots,$$

故

$$\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{n-1}.$$

利用冪級數之積分定理知

$$\begin{aligned}
 \int_{\lambda}^{2\lambda} \frac{e^{-x}}{x} dx &= \int_{\lambda}^{2\lambda} \frac{dx}{x} + \int_{\lambda}^{2\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n-1} dx \\
 &= \int_{\lambda}^{2\lambda} \frac{dx}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\lambda}^{2\lambda} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n-1} dx \\
 &= \ln(2\lambda) - \ln \lambda + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left[\frac{x^n}{n} \right]_{x=\lambda}^{x=2\lambda} \\
 &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} (2^n \lambda^n - \lambda^n),
 \end{aligned}$$

是以

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\lambda}^{2\lambda} \frac{e^{-x}}{x} dx = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (2^n - 1) \lambda^n = \ln 2.$$

§ 23 n 維空間與向量運算

本單元以後，凡向量元素皆以粗體 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 等表示，而不寫為 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ 。

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

♠ (23-1) 設向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ，試證：

- $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$ ；
- 若 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 皆為非零向量，則 $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \sin \theta$ ，內 $\theta \in [0, \pi]$ 為此二向量之夾角；
- 若 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 皆為非零向量，則 $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 之充要條件為此二向量之夾角等於 0 或 π 。

分析 提醒讀者：

- 設 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ 為 n 維向量，其內積定義為 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ ；
- 設 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 為三維向量，其叉積定義為

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ 。

【證】 令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 。

(a) 由於

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &= (x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_3^2) + (x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_2^2 y_3^2) + (x_3^2 y_1^2 + x_3^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2) \\ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\ &= x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2 + 2(x_1 y_1 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_3 y_3 + x_2 y_2 x_3 y_3), \end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 &= x_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_3^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_1^2 + x_3^2 y_2^2 \\ &\quad - 2(x_1 y_1 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_3 y_3 + x_2 y_2 x_3 y_3), \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
 &= x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_2y_3x_3y_2 + x_3^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1y_3x_3y_1 \\
 &\quad + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1y_2x_2y_1, \quad (2)
 \end{aligned}$$

比較 ① 和 ②，顯然 $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$.

(b) 由 (a) 知，

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 &= |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \\
 &= |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta)^2 = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
 &= |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2\sin^2\theta,
 \end{aligned}$$

開方後即得所欲證。

(c) 由 (b) 立得。

♠ (23-2) 設向量 $\mathbf{x} = (2, 2, p)$ ， $\mathbf{y} = (q, 4, -2)$ ，滿足 $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ 且 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ，試求常數 $p = ?$ ， $q = ?$

分析 只需將「向量絕對值」定義及「二向量互相垂直」之條件加以聯立，即可解出。

【解】 由原設

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| \Rightarrow \sqrt{8 + p^2} = \sqrt{q^2 + 20} \Rightarrow p^2 = q^2 + 12, \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \Rightarrow 2q + 8 - 2p = 0 \Rightarrow p = q + 4, \quad (2)$$

② 代入 ① 得 $(q + 4)^2 = q^2 + 12$ ，故 $q = -1/2$ ， $p = 7/2$ 。

♠ (23-3) 試求點 $P(1, 2, 1)$ 與直線 $L: (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, 2)$ 之最短距離。

分析 三維空間二向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ， $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 之距離為：

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2};$$

又，某函數若帶根號，欲求其極值時，先求根號內函數之極值，較為簡單。

【解】 由於 $L: (x, y, z) = (1 + 2t, 1 + t, 1 + 2t)$ ，故 P 與 L 上一點 (x, y, z) 之距離可表為 t 之函數，

$$f(t) = \sqrt{(1 + 2t - 1)^2 + (1 + t - 2)^2 + (1 + 2t - 1)^2},$$

而根號內之最小值，平方後即為 f 之最小值。故令

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g(t) = 4t^2 + (t-1)^2 + 4t^2 = 9t^2 - 2t + 1,$$

而

$$g'(t) = 18t - 2 \begin{cases} < 0, & \text{若 } t < 1/9, \\ = 0, & \text{若 } t = 1/9, \\ > 0, & \text{若 } t > 1/9. \end{cases}$$

知當 $t = 1/9$ 時， g 有最小值。換言之點 P 與 L 之最近距離為 $f(1/9) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

註：由於 g 為一二次多項式，使用配方法亦可求得最小值。

- ♠ (23-4) 試求二平面 $2x - 3y + 5z + 1 = 0$ ， $-4x + 6y + 10z - 2 = 0$ 之夾角 θ ，其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。

分析 二平面之法向量之夾角即為此二平面之夾角。

【解】 二平面之夾角乃其法向量之夾角，而此二平面之法向量分別為 $(2, -3, 5)$ 及 $(-4, 6, 10)$ ，由內積公式，應有

$$\cos \theta = \frac{(2, -3, 5) \cdot (-4, 6, 10)}{\sqrt{(2^2 + (-3)^2 + 5^2)((-4)^2 + 6^2 + 10^2)}} = \frac{-8 - 18 + 50}{\sqrt{38 \cdot 152}} = \frac{6}{19},$$

故 $\theta = \cos^{-1}(6/19)$ 。

- ♠ (23-5) 試求二直線

$$\begin{cases} \mathbf{f}(t) = (t, t, 2t), & t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{g}(s) = (1-s, 2+s, 1+2s), & s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

之最短距離。並求 t_0 及 s_0 以使 $f(t_0)$ 及 $g(s_0)$ 之距離等於上述最短距離。

分析 先利用法向量求出過二線之二平行面，再利用過二平面

$$P_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0, \quad P_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

之距離公式 $\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 至於二線上相距最短之點，可用二變數極值方法解之。

【解】 二直線之最短距離可視為分別過二線之二平行面之距離。

1° 先求二平行面之法向量 (A, B, C) 。

令 $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$ ， $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 2)$ ，則二直線為

$$\mathbf{f}(t) = t(1, 1, 2) = t\mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{g}(s) = (1, 2, 1) + s(-1, 1, 2) = (1, 2, 1) + s\mathbf{v}_2.$$

$\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 之叉積應為二平行平面之法向量的一組方向數,

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (0, -4, 2).$$

為方便取其比例 $(A, B, C) = (0, 2, -1)$.

2° 平面 P_1 通過原點, 故其方程式為 $Ax + By + Cz = 0$.

平面 P_2 過點 $(1, 2, 1)$, 其方程式為

$$A(x - 1) + B(y - 2) + C(z - 1) = 0$$

即

$$Ax + By + Cz - 3 = 0, \quad (\text{因 } -A - 2B - C = -3).$$

故二平行面之距離為

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|0 - (-3)|}{\sqrt{0 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

3° 二線上各取一點 $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(s)$, 其距離之平方為

$$\begin{aligned} F(t, s) &= |\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(s)|^2 = (t - 1 + s)^2 + (t - 2 - s)^2 + (2t - 1 - 2s)^2 \\ &= 6t^2 - 10t - 8ts + 6s + 6s^2 + 6. \end{aligned}$$

因 F 之偏導數為

$$D_1 F(t, s) = 12t - 8s - 10,$$

$$D_2 F(t, s) = -8t + 12s + 6,$$

由

$$\begin{cases} 12t - 8s - 10 = 0, \\ -8t + 12s + 6 = 0, \end{cases}$$

聯立解得 $t = 9/10$, $s = 1/10$, 此時

- 第一直線上之點為 $\mathbf{f}\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}, \frac{9}{10}, \frac{18}{10}\right)$,

- 第二直線上之點為 $\mathbf{g}\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}, \frac{21}{10}, \frac{12}{10}\right)$.

此二點之距離為 $\sqrt{F(t, s)} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, 是以上述二點乃為所欲求.

註: 本題若省略 1° 及 2°, 僅以 3° 解題, 則應加證 F 在其唯一臨界點 $(9/10, 1/10)$ 有最小值.

故知二切向量的夾角為 $\theta = \cos^{-1} \left(-\frac{7}{9\sqrt{2}} \right)$.

- ♠ (24-2) 設一質點之運動律為 $\mathbf{F}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: \mathbf{F}(t) = (3 \cos t, 2 \sin t, t)$, 試問在何時 (即 $t = ?$), 此質點之運動速率最快? 又何時最慢?

分析 此質點乃繞橢圓柱體 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 之表面而上, 類似螺旋線. 質點之運動速率乃速度向量之絕對值, 此為單變數 t 之函數, 利用單變數函數求極值方法即可.

【解】 由於質點之速度向量為 $\mathbf{F}'(t) = (-3 \sin t, 2 \cos t, 1)$, 故在時間 t 時, 此質點之速率為

$$|\mathbf{F}'(t)| = \sqrt{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} = \sqrt{5 \sin^2 t + 5}.$$

為求其極值點, 只需求上述函數根號內函數之極值點. 令

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}: g(t) = 5 \sin^2 t + 5,$$

則

$$g'(t) = 10 \sin t \cos t = 5 \sin(2t),$$

知 g 之臨界點集合為 $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$, 又由下表,

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$g'(t)$	0	+	0	-	0
說明	min	↗	max	↘	min

最後, 因

$$\begin{cases} g(\pi/2) = g(3\pi/2) = 10, \\ g(0) = g(\pi) = g(2\pi) = 5, \end{cases}$$

知 $t \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$ 時, 速率最快, 當 $t \in \{0, \pi, 2\pi\}$ 時, 速率最慢.

註: 由於 g 之定義域為一緊緻區間, 而 g 為一連續函數, 故只需比較各臨界點之函數值, 上述繪表並非必要, 但繪表可更清晰看清問題.

♠ (24-3)

- (a) 試將以下運動以一向量函數表之: 『在 $\mathbb{R}^2$ 平面上 (單位: 公尺), 質點由點 $(1, 0)$ 沿單位圓之上半以每分鐘 1 公尺之速率移動至點 $(-1, 0)$, 再沿 X 軸以相同速率移動至原點.』
- (b) 試問在點 $(-1, 0)$, 此質點之速度向量為何?

分析 繪圖方便我們的思考和解題.

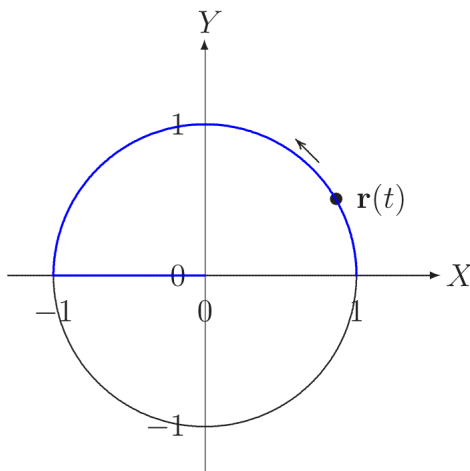


圖 24-1

【解】(a) 第一段運動可表為

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad \forall t \in [0, \pi],$$

則當 $\forall t \in [0, \pi)$, $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, 速率為 $|\mathbf{r}'(t)| = 1$.

第二段運動可表為

$$\mathbf{r}(t) = (t - \pi - 1, 0), \quad \forall t \in [\pi, \pi + 1],$$

則當 $\forall t \in (\pi, \pi + 1]$, $\mathbf{r}'(t) = (1, 0)$, 速率為 $|\mathbf{r}'(t)| = 1$, 此外, $\mathbf{r}(\pi) = (-1, 0)$, $\mathbf{r}(\pi + 1) = (0, 0)$. 所以此運動之向量函數為

$$\mathbf{r}: [0, \pi + 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & \text{若 } t \in [0, \pi], \\ (t - \pi - 1, 0), & \text{若 } t \in [\pi, \pi + 1]. \end{cases}$$

(b) 質點在點 $(-1, 0)$ 相當於 $t = \pi$, 因為

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(\pi)}{t - \pi} &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{(\cos t, \sin t) - (-1, 0)}{t - \pi} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} \left(\frac{\cos t + 1}{t - \pi}, \frac{\sin t}{t - \pi} \right) = (0, -1); \\ \bullet \quad \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(\pi)}{t - \pi} &= \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{(t - \pi - 1, 0) - (-1, 0)}{t - \pi} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi^+} \left(\frac{t - \pi}{t - \pi}, 0 \right) = (1, 0); \end{aligned}$$

是以在點 $(-1, 0)$, 此質點之速度向量不存在.

♠ (24-4) 設 $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, (其中 $n = 2$ 或 3), 為一向量函數, 則

$$\mathbf{s}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{s}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(a + b - t)$$

稱為 $\mathbf{r}$ 之反向曲線 (opposite curve). 試求上題向量函數 $\mathbf{r}$ 之反向曲線.

分析 $\mathbf{r}$ 之第一段時間為 0 至 π ，第二段時間為 π 至 $\pi+1$ ，而逆向運動之第一段時間為 0 至 1，第二段時間為 1 至 $\pi+1$ 。

【解】 上題之位置向量 (position vector)

$$\mathbf{r}: [0, \pi+1] \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & \text{若 } t \in [0, \pi], \\ (t - \pi - 1, 0), & \text{若 } t \in [\pi, \pi+1]. \end{cases}$$

因此，令 $a = 0$, $b = \pi+1$ ，反向曲線則為

$$\mathbf{s}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n: \mathbf{s}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(a+b-t).$$

我們將分二種情形討論：

- $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -t \leq 0$
 $\Rightarrow \pi \leq \pi+1-t \leq \pi+1$
 $\Rightarrow \mathbf{r}(\pi+1-t) = ((\pi+1-t) - \pi - 1, 0) = (-t, 0)$
 $\Rightarrow \mathbf{s}(t) = (-t, 0)$;
- $1 \leq t \leq \pi+1 \Rightarrow -\pi-1 \leq -t \leq -1$
 $\Rightarrow 0 \leq \pi+1-t \leq \pi$
 $\Rightarrow \mathbf{r}(\pi+1-t) = (\cos(\pi+1-t), \sin(\pi+1-t))$
 $\Rightarrow \mathbf{s}(t) = (\cos(\pi+1-t), \sin(\pi+1-t))$.

亦即 $\mathbf{s}: [0, \pi+1] \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{s}(t) = \begin{cases} (-t, 0), & \text{若 } t \in [0, 1], \\ (\cos(\pi+1-t), \sin(\pi+1-t)), & \text{若 } t \in [1, \pi+1]. \end{cases}$$

驗算： $\mathbf{s}(0) = (0, 0)$ ， $\mathbf{s}(1) = (-1, 0)$ ， $\mathbf{s}(1 + \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ ， $\mathbf{s}(\pi+1) = (1, 0)$ 。

♠ (24-5) 設

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & (1) \\ x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, & (2) \end{cases}$$

為 $\mathbb{R}^3$ 上一曲線，試求曲線上最接近原點之點。

分析 設法將曲線表為向量函數 (即參數方程式)。

【解】 由 (1) 式知曲線在 $x^2 + y^2 = 1$ ，可令 $x = \cos \theta$ ， $y = \sin \theta$ ，代入 (2) 式，則

$$z^2 = -xy = -\cos \theta \sin \theta = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad (\text{注意: } xy \leq 0)$$

故曲線可表為參數方程式

$$\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \\ z = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \sin 2\theta}, \end{cases} \quad \theta \in [\pi/2, \pi] \cup [3\pi/2, 2\pi].$$

(註： $\theta = 0$ 與 $\theta = 2\pi$ 在原曲線 (1), (2) 為同一點，前者為參數方程式定義域之孤立點，因此只取後者。) 是以曲線上之點與原點距離的平方，乃函數

$$f: [\pi/2, \pi] \cup [3\pi/2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} : f(\theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta = 1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

由於 $-\frac{1}{2} \sin 2\theta \geq 0$ ，是以

$$f \text{ 在點 } \theta \text{ 有最小} \Leftrightarrow \sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}.$$

故知此曲線與原點最近之點有

$$\left\{ (\cos \theta, \sin \theta, 0) \mid \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\} \right\} = \{(0, 1, 0), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (1, 0, 0)\}.$$

♥ (24-6)

- (a) 設函數 $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ 為一向量函數，其中 $t \in [a, b]$ ，若 $\mathbf{f}$ 連續於區間 $[a, b]$ ，可微於 (a, b) 且 $\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)$ 不為零向量，試證：存在一 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\mathbf{f}$ 在點 ξ 之切向量與向量 $\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)$ 相垂直。
- (b) 設向量函數 $\mathbf{f}: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ， $a = 0$ ， $b = \pi/2$ ，試求 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\mathbf{f}$ 在點 ξ 之切向量與向量 $\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)$ 相垂直。

分析

(a) 題須設計一單變數函數，以使其導數為 $\mathbf{f}$ 之切向量與向量 $\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)$ 之內積，再利 Rolle 定理。(b) 題則由先求 $\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)$ 及 $\mathbf{f}$ 在點 ξ 之切向量。

【解】(a) 令 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : g(t) = (\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)) \cdot \mathbf{f}'(t)$ ，則

- g 在區間 $[a, b]$ 上為連續，
- g 在區間 (a, b) 上為可微，
- $g(a) = g(b) = 0$ ，(利用叉積與內積性質。)

由 Rolle 定理知，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$ ，即

$$0 = g'(\xi) = (\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)) \cdot \mathbf{f}'(\xi),$$

故知 $\mathbf{f}$ 在點 ξ 之切向量與向量 $\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)$ 相垂直。

(b) 由 $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $a = 0$, $b = \pi/2$, 得

$$\mathbf{f}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad \mathbf{f}(a) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{f}(b) = (0, 1, \pi/2).$$

故

$$\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pi/2 \end{vmatrix} = (0, -\pi/2, 1).$$

由題意

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}(a) \times \mathbf{f}(b)) \cdot \mathbf{f}'(\xi) = 0 &\Leftrightarrow (0, -\pi/2, 1) \cdot (-\sin \xi, \cos \xi, 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi \cos \xi}{2} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \xi = \frac{2}{\pi} \\ &\Leftrightarrow \xi = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right), \quad (\because \xi \in (0, \pi/2)) \end{aligned}$$

$$\left[\text{註：利用電腦數學軟體知 } \cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx 0.88069. \right]$$

♠ (24-7) 試求 $y = 3x - x^3$ 之圖形在點 $(1, 2)$ 之曲率半徑及曲率中心.

分析 我們可以使用二維及三維之曲率公式：

$$k(t_0) = \left| \frac{\mathbf{T}'(t_0)}{s'(t_0)} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t_0)|}{|\mathbf{f}'(t_0)|} \quad (\text{CV1})$$

或單變數函數 $y = f(x)$ 之曲率公式

$$k(x_0) = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \Big|_{x=x_0} \quad (\text{CV2})$$

上述二公式內各符號請參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第九章 §9.3. 不過若使用公式 (CV2), 我們可以迅速求出曲率半徑, 但在求曲率中心時, 會有麻煩.

【解】 1° 先求曲率.

法一：利用 (CV2). 由於 $y' = 3 - 3x^2$, $y'' = -6x$, 本題中 $x_0 = 1$,

$$k(1) = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \Big|_{x=1} = \frac{|-6x|}{(1 + (3 - 3x^2)^2)^{3/2}} \Big|_{x=1} = \frac{6}{1} = 6.$$

法二：利用 (CV1). 先將曲線化為向量函數：

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{f}(t) = (t, 3t - t^3),$$

若令 $t_0 = 1$, 則指定點為 $\mathbf{f}(t_0) = (1, 2)$. 利用公式 (CV1),

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t) &= (t, 3t - t^3) \Rightarrow \mathbf{f}'(t) = (1, 3 - 3t^2), \\ |\mathbf{f}'(t)| &= \sqrt{1 + (3 - 3t^2)^2} = \sqrt{10 - 18t^2 + 9t^4} \\ \Rightarrow \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10 - 18t^2 + 9t^4}}, \frac{3 - 3t^2}{\sqrt{10 - 18t^2 + 9t^4}} \right) \\ \Rightarrow \mathbf{T}'(t) &= \left(-\frac{1}{2}(10 - 18t^2 + 9t^4)^{-3/2}(-36t + 36t^3), \right. \\ &\quad \left. -6t(10 - 18t^2 + 9t^4)^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. + (3 - 3t^2) \cdot \frac{-1}{2}(10 - 18t^2 + 9t^4)^{-3/2}(-36t + 36t^3) \right) \\ \Rightarrow \mathbf{T}'(1) &= (0, -6) \\ \Rightarrow |\mathbf{T}'(1)| &= 6 \\ \Rightarrow k(1) &= \frac{|\mathbf{T}'(1)|}{|\mathbf{f}'(1)|} = \frac{6}{1} = 6.\end{aligned}$$

2° 是以, 曲率半徑為 $\rho(1) = \frac{1}{k(1)} = \frac{1}{6}$.

3° 最後求曲率中心. 曲率中心 $C(x_0, y_0)$ 乃為以曲率半徑為半徑, 則以此點為圓心所繪之圓滿足:

- 在指定點 P (在此為 $(1, 2)$), 與原曲線相切;
- 二者之曲率半徑相同;
- C 位於過點 P 之主法線上且 $\overrightarrow{PC}$ 與主法向量 $\mathbf{N}(t_0)$ 之方向相同, 由於

$$\mathbf{N}(1) = \frac{\mathbf{T}'(1)}{|\mathbf{T}'(1)|} = (0, -1),$$

故曲率中心為

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= \rho(t_0)\mathbf{N}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \\ &= \rho(1)\mathbf{N}(1) + (1, 2) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (0, -1) + (1, 2) \\ &= \left(1, \frac{11}{6}\right).\end{aligned}$$

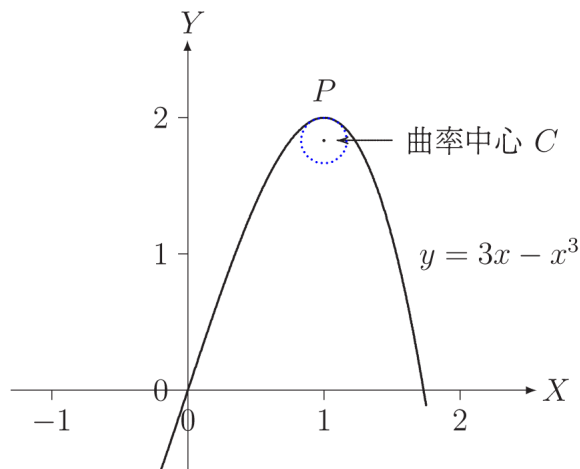


圖 24-2

♠ (24-8) 試求曲線 $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: \mathbf{f}(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$ 在曲線上之點 $\mathbf{f}(1)$ 之曲率半徑.

分析 曲率半徑之計算只是代公式而已，如果指定點不是「被設計」得很容易計算，隨便換個數，例如 $t_0 = 1/2$ ，式子將變得十分繁雜，唯一的方法是求助計算機之數學軟體.

【解】 利用上題的公式 (CV1)，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(t) &= \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right) \Rightarrow \mathbf{f}'(t) = (1, t, t^2), \quad |\mathbf{f}'(t)| = \sqrt{1+t^2+t^4}, \\
 \Rightarrow \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} = ((1+t^2+t^4)^{-1/2}, t(1+t^2+t^4)^{-1/2}, t^2(1+t^2+t^4)^{-1/2}), \\
 \Rightarrow \mathbf{T}'(t) &= \left(\frac{-1}{2}(1+t^2+t^4)^{-3/2}(2t+4t^3), \right. \\
 &\quad \left.(1+t^2+t^4)^{-1/2} - \frac{t}{2}(1+t^2+t^4)^{-3/2}(2t+4t^3), \right. \\
 &\quad \left. 2t(1+t^2+t^4)^{-1/2} - \frac{t^2}{2}(1+t^2+t^4)^{-3/2}(2t+4t^3)\right) \\
 \Rightarrow \mathbf{T}'(1) &= \left(-\frac{1}{3^{1/2}}, 0, \frac{1}{3^{1/2}}\right) \\
 \Rightarrow |\mathbf{T}'(1)| &= \sqrt{\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\
 \Rightarrow k(1) &= \frac{|\mathbf{T}'(1)|}{|\mathbf{f}'(1)|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad (\text{此為曲率}) \\
 \Rightarrow \rho(1) &= \frac{1}{k(1)} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad (\text{此為曲率半徑.})
 \end{aligned}$$

對於 $\epsilon > 0$ ，考慮 $(x, y) \in D_f \setminus \{(0, 0)\}$ ，

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| < \epsilon &\Leftrightarrow |x + y| < \epsilon^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}r < \epsilon^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < r < \epsilon^2/\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \quad (\text{取 } \delta = \epsilon^2/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

♠ (25-3) 設函數

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0), \\ k, & \text{若 } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

試問 k 為何值可使 f 為一連續函數。

分析 如果 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 存在，只需令 k 等於此極限值，但若 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在，不論 k 為何值均不使 f 為連續。

【解】 設 $L_m = \{(x, y) \mid y = mx, x \neq 0\}$ ， $m \in \mathbb{R}$ ，則極限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{L_m}(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

因 m 之值而變，故知極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在，是以不論 k 為何值均不使 f 為連續。

♠ (25-4) 設 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ，函數

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = \begin{cases} \frac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0), \\ c, & \text{若 } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

試問 c 為何值可使 f 為一連續函數。

分析 當分母為 $x^2 + y^2$ ，常用極坐標方法以解決極限問題。

【解】 令 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ ，其中 $r > 0$ ， $\theta \in [0, 2\pi]$ ，則 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，當 $r > 0$ 時，

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\tan r^2}{r^2},$$

由於

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\tan r^2}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin r^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\cos r^2} = 1.$$

亦即

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (\forall r) (0 < r < \delta \Rightarrow \left| \frac{\tan r^2}{r^2} - 1 \right| < \epsilon).$$

應有

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) (0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 1| < \epsilon).$$

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$ ，是以當 $c = 1$ 時，可使 f 在點 $(0, 0)$ 為連續。

♠ (25-5) 試以 ϵ - δ 方法求極限： $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = ?$

分析 當分母為 $x^2 + y^2$ 而分子之次數又大於 2 時，極限很可能為 0，我們仍使用極坐標方法。

【解】 令 $f(x, y) = \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ ，顯然 f 之定義域為 $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 。我們預測 f 在點 $(0, 0)$ 之極限為 0，往證：

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in D_f (0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < \epsilon).$$

首先，令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ，其中 $r > 0$ ，由於

$$|f(x, y)| = \left| \frac{2r^3 \cos^3 \theta - r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \right| = |r(2 \cos^3 \theta - \sin^3 \theta)| \leq 3r.$$

對於 $\epsilon > 0$ ，

$$\begin{aligned} |f(x, y)| < \epsilon &\Leftrightarrow 3r < \epsilon \\ &\Leftrightarrow r < \epsilon/3 \\ &\Leftrightarrow r < \delta, \quad (\text{令 } \delta = \epsilon/3) \\ &\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta. \end{aligned}$$

♠ (25-6) 試求極限： $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} = ?$

分析 雖然分子之次數大於分母之次數，但當 x 十分接近 $-y$ 時分母變得很小，只需適當設計，我們可以找到兩條不同路徑趨近於點 $(0, 0)$ ，其極限不同。

【解】 令

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y) \mid 0 \neq y = x\}, \\ S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \neq y = x^2 - x\}, \end{aligned}$$

則

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_L(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^4}{x^3 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_S(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + (x^2 - x)^4}{x^3 + (x^2 - x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 3} = \frac{2}{3},$$

二者不相等，故知 f 在原點之極限不存在。

♠ (25-7) 設

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0,0)\},$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} : f(x,y) = e^{x+y}.$$

- (a) 試證：點 $(0,0)$ 為集合 A 內唯一聚點 (accumulation point);
 (b) 試求 f 在其定義上各點之極限並討論其連續性。

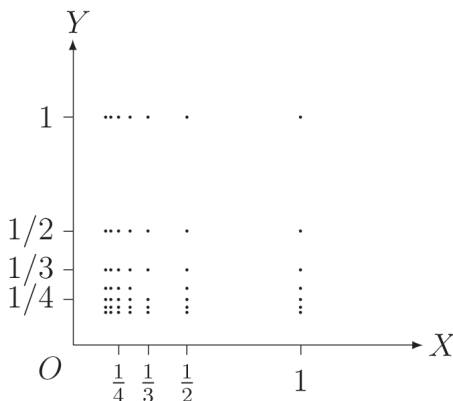


圖 25-1

分析 解題前請先了解「極限」和「連續」之定義，否則肯定答非所問。（註：在初等微積分中，通常不討論得這麼細，但也有不少作者對於極限和連續的定義採取較嚴格定義，建議有興趣諸者參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十章 §10.1.）

【解】 (a) $\forall \epsilon > 0$ ，取自然數 n 滿足 $n > \sqrt{2}/\epsilon$ ，則

$$\left| \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{2}{n^2}} < \epsilon,$$

知 $(1/n, 1/n)$ 必在點 $(0,0)$ 之 ϵ 去心鄰近內，由聚點之定義知，點 $(0,0)$ 為集合 A 之一聚點。至於 A 內之任一點 $(1/n, 1/m)$ ，只需取 ϵ 夠小之正數，則其 ϵ 去心鄰近與 A 之交集必為空集合，換言之， $(1/n, 1/m)$ 為 A 之孤立點。

(b) 點 $(0,0)$ 既為定義域 A 唯一聚點，是以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{x+y} = \exp \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \right) = 1 = f(0,0).$$

知 f 在點 $(0,0)$ 為連續。

在 A 內每一點 $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$ 皆為 A 之孤立點，由極限之定義知， f 在其上之極限不存在，但依連續之定義 f 在點 $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$ 為連續。

♠ (25-8) 設 $f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & \text{若 } x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0. \\ 0, & \text{若 } x = 0 \text{ 或 } y = 0. \end{cases}$

試判斷以下之極限是否存在，若存在則求其值：

(a) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y))$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y))$;

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

分析 討論 (a) 題時，先討論裡面的極限，注意：此時 $y \neq 0$ ，利用「制限」方法，可以證明極限不存在。

【解】 (a) 先證： $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$ 不存在，其中 y 為一固定數滿足 $\sin \frac{1}{y} \neq 0$ 。令

$$A = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\text{則因 } \forall x \in A, \sin \frac{1}{x} = 1; \quad \forall x \in B, \sin \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} \left(x \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right) = y \sin \frac{1}{y},$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in B}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in B}} \left(x \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right) = -y \sin \frac{1}{y},$$

二者不相等，故當 $\sin \frac{1}{y} \neq 0$ 時， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$ 不存在，因之 $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y))$ 不存在。

(b) 同理， $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ 不存在。

(c) 由於

$$\left| \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq 1, \quad \forall x \neq 0 \text{ 且 } \forall y \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x+y|, \quad \forall x \neq 0 \text{ 且 } \forall y \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x,y) \leq |x+y|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

而 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x+y| = 0$, 利用三明治原理知 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

♠ (25-9) 設

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(s,t) = \begin{cases} 1/6, & \text{若 } (s,t) \in \{(0,0), (1,0)\}, \\ 1/3, & \text{若 } (s,t) \in \{(0,1), (1,1)\}, \\ 0, & \text{否則.} \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: g(x,y) = \sum_{s \leq x, t \leq y} f(s,t).$$

試問函數 g 在何處不為連續.

分析 本題之函數 g 為《機率論》二維隨機向量之累積分配函數.

【解】 令集合

$$A = \{(x,y) \mid x < 0 \text{ or } y < 0\},$$

$$B = \{(x,y) \mid 0 \leq x < 1 \text{ and } 0 \leq y < 1\},$$

$$C = \{(x,y) \mid 1 \leq x \text{ and } 0 \leq y < 1\},$$

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x < 1 \text{ and } 1 \leq y\},$$

$$E = \{(x,y) \mid 1 \leq x \text{ and } 1 \leq y\}.$$

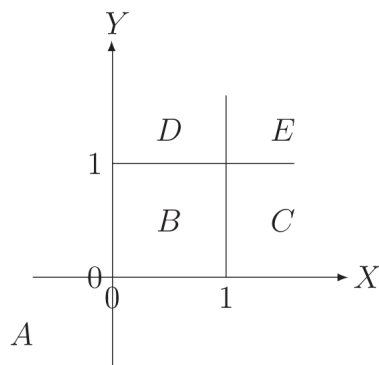


圖 25-2

則

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } (x,y) \in A, \\ 1/6, & \text{若 } (x,y) \in B, \\ 1/3, & \text{若 } (x,y) \in C, \\ 1/2, & \text{若 } (x,y) \in D, \\ 1, & \text{若 } (x,y) \in E. \end{cases}$$

我們將證明：函數 g 在上述五集合之邊界上諸點皆不連續，為簡化計，只證明：當 $x_0 = 0$, $0 < y_0 < 1$ 之情況 (y_0 固定). 為此，令直線 $L = \{(x, y_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, 則因

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g|_L(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x, y_0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g|_L(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x, y_0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{6} = \frac{1}{6},$$

二者不相等，知 $\lim_{x \rightarrow 0} g|_L(x, y)$ 不存在，因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$ 亦不存在，說明 g 在點 (x_0, y_0) 不為連續.

♠ (25-10) 設

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x+y}{x-y}, & \text{若 } x \neq y, \\ 0, & \text{若 } x = y. \end{cases}$$

試問 f 於何處不為連續.

分析 f 顯然連續於直線 $y = x$ 之外的點，但在直線 $y = x$ 上之點 $\mathbf{p}$ ，應如何證明其極限不存在，則需利用「制限」方法.

【解】 設 $E = \{(x, y) \mid x = y\}$.

- 1° 若 $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ ，則存在一鄰近 $N_\delta(\mathbf{p}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E$ ，於其上 f 為一有理函數，故 f 於點 $\mathbf{p}$ 必為連續.
- 2° 若 $\mathbf{p} = (p, p) \in E$ ，設 $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y - p, \ x \neq p\}$ (過點 (p, p) 斜率為 $1/2$ 之直線)，則因極限

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (p,p)} f|_L(x, y) &= \lim_{y \rightarrow p} \frac{11y - 5p}{y - p} \\ &= \begin{cases} 11, & \text{若 } p = 0, \\ \text{不存在} & \text{若 } p \neq 0, \end{cases} \\ &\neq 0 = f(p, p). \end{aligned}$$

故知 f 於點 (p, p) 不為連續.

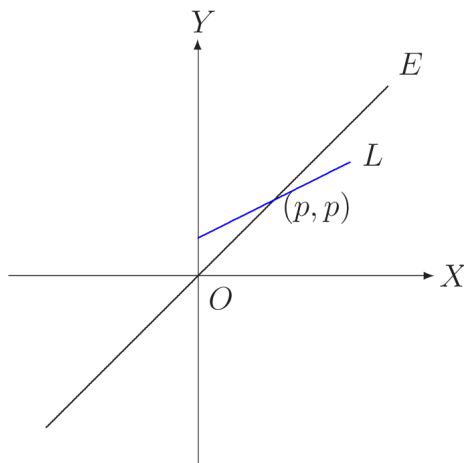


圖 25-3

§ 26 方向導數、梯度與切面

本單元涉及「偏導數」、「方向導數」、「可微」、「梯度」等名詞之定義以及相關定理，讀者可參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十章 § 10.2 及 § 10.3。

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

● 偏導數與方向導數

♠ (26-1) 試求函數 $f(x, y) = (x-1)y^2 \cdot e^{xy}$ 在點 $\mathbf{p} = (1, -1)$ 指向點 $\mathbf{a} = (-1, 3)$ 之方向導數。

分析 先求出所指方向之向量，再化為單位向量，最後利用方向導數公式。

【解】 由 $\mathbf{p}$ 指向 $\mathbf{a}$ 之向量為 $\mathbf{a} - \mathbf{p} = (-2, 4)$ ，其單位向量為

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{p}}{|\mathbf{a} - \mathbf{p}|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

其次，

$$D_1 f(x, y) = y^2 e^{xy} + (x-1)y^3 e^{xy},$$

$$D_2 f(x, y) = 2y(x-1)e^{xy} + (x-1)y^2 x e^{xy}.$$

此二偏導函數顯然皆為連續，又 $D_1 f(\mathbf{p}) = e^{-1}$ ， $D_2 f(\mathbf{p}) = 0$ ，故所欲求之方向導數為（利用拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十章定理 10.13）

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) &= v_1 D_1 f(\mathbf{p}) + v_2 D_2 f(\mathbf{p}) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot e^{-1} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 = -\frac{1}{\sqrt{5}} e. \end{aligned}$$

[註] 本題亦可由方向導數之定義 $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{h}$ 直接解之。

♠ (26-2) 設函數 $f(x, y) = xy + \ln(xy)$ ， $\mathbf{p} = (1, 2)$ ，試求單位向量 $\mathbf{u}$ 以使 f 在點 $\mathbf{p}$ 沿方向 $\mathbf{u}$ 之方向導數為零。

分析 設 $\mathbf{u} = (a, b)$ ，由題意可得以下二條件聯立以解決問題：

① $\mathbf{u}$ 為單位向量，② $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = a D_1 f(\mathbf{p}) + b D_2 f(\mathbf{p}) = 0$ 。

【解】 首先，

$$\begin{cases} D_1 f(1, 2) = y + \frac{y}{xy} \Big|_{(1,2)} = 3, \\ D_2 f(1, 2) = x + \frac{x}{xy} \Big|_{(1,2)} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

次設 $\mathbf{u} = (a, b)$ ，由於 $D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = aD_1f(1, 2) + bD_2f(1, 2) = 3a + \frac{3b}{2}$ 。由原設，應有

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (1)$$

$$3a + \frac{3b}{2} = 0 \quad (2)$$

由 (2) 式得 $b = -2a$ ，代入 (1) 式得， $a^2 + 4a^2 = 1$ ，是以

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = -2a = \mp \frac{2}{\sqrt{5}},$$

所求單位向量

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right) \text{ 或 } \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

♠ (26-3) 若 $z = x + f(u)$ ，內 $u = xy$ 。試證： $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x$ 。

分析 本題中之 f 為一單變數實值函數，求 $\frac{\partial}{\partial x}f(u) = \frac{\partial}{\partial x}f(xy)$ 時，視 y 為常數，利用單變數連鎖律， $\frac{\partial}{\partial x}f(u) = \frac{d}{dx}f(xy) = f'(xy)y = f'(u)y$ 。

【解】 由於

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + f(u)) = 1 + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 1 + f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + f'(u)y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + f(u)) = \frac{\partial}{\partial y}f(u) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)x,$$

故

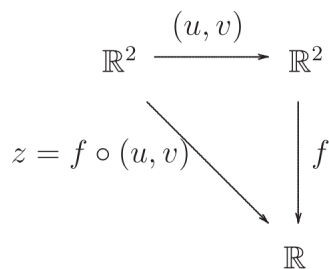
$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x + f'(u)xy - f'(u)xy = x.$$

♠ (26-4) 設 $f(u, v)$ 及 $g(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上之定義域內皆為二階連續可偏微分， $u = y/x$ ， $v = g(x, y)$ ，令 $z = f(u, v)$ 。試求

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \text{ 及 } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y).$$

分析 將本題之諸函數予以繪出其關係圖，有助於了解題意及解題。其中

$$(u, v)(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \left(\frac{y}{x}, g(x, y) \right).$$



【解】1° 利用多變函數連鎖律公式，

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y).\end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}_{(*1)} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}}_{(*2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}_{(*3)} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}}_{(*4)}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}(*1) &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \\ &= \left(D_{11}f(u, v) \cdot \frac{1}{x} + D_{12}f(u, v) \cdot D_2g(x, y) \right) \cdot \frac{-y}{x^2},\end{aligned}$$

$$(*2) = D_1f(u, v) \cdot \frac{-1}{x^2},$$

$$\begin{aligned}(*3) &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ &= \left(D_{21}f(u, v) \cdot \frac{1}{x} + D_{22}f(u, v) \cdot D_2g(x, y) \right) \cdot D_1g(x, y),\end{aligned}$$

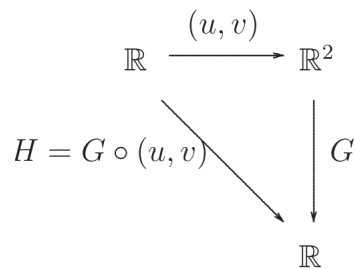
$$(*4) = D_2f(u, v) \cdot D_{12}g(x, y).$$

♠ (26-5) 設函數 $f(x, y)$ 為連續可偏微分，且 $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ ，試利用

$$F'(y) = \int_a^b f_2(x, y) dx, \quad (\text{註：} f_2 = D_2f)$$

以求 $H(x) = G(u(x), v(x)) = \int_a^{u(x)} f(t, v(x)) dt$ 之導函數 $H'(x) = ?$ (內 u 與 v 均為可微分函數.)

分析 本題需要「微積分基本定理」以及「多變數函數之連鎖律」。各函數之間的關係如右。



【解】利用多變數函數之連鎖律，

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \\ &= f(u(x), v(x)) \cdot \frac{du}{dx} + \int_a^{u(x)} f_2(t, v(x)) dt \cdot \frac{dv}{dx} \\ &= f(u(x), v(x)) \cdot u'(x) + \int_a^{u(x)} f_2(t, v(x)) dt \cdot v'(x). \end{aligned}$$

♠ (26-6) 試由方程組 $\begin{cases} u \cos v - x = 0, \\ u \sin v - y = 0, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial x}$.

【分析】先由原設之方程組解出 u 及 v ，再做偏導數。

【解】原方程式可寫為

$$u \cos v = x \quad (1)$$

$$u \sin v = y \quad (2)$$

- 由 $(1)^2 + (2)^2$ 得 $u^2 = x^2 + y^2$ ，是以 $u = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ 。
- 由 $(2)/(1)$ 得 $\tan v = \frac{y}{x}$ ，即 $v = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 。

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\pm x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{1 + (y^2/x^2)} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

♠ (26-7) 設函數 $u = f(x, y)$ 及 $v = g(x, y)$ 為可微分且 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ， $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ，若 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ 。

(a) 試證： $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$ 且 $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$ 。

(b) 若 u 為二階可偏微分，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = ?$

【分析】本題有以下兩個合成函數：

$$\begin{cases} u = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta), \\ v = g(x, y) = g(r \cos \theta, r \sin \theta). \end{cases}$$

分別利用多變數連鎖律解題。

【解】(a) 由於

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot r \cos \theta, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta, \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (-r \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot r \cos \theta, \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot r \cos \theta;\end{aligned}$$

$$\text{是以 } \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ 且 } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

(b) 其次

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \cdot \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \cdot \sin \theta \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

♠ (26-8) 試問是否存在一二變數函數 $f(x, y)$ ，使得 $D_1 f(x, y) = 5y$ ， $D_2 f(x, y) = 2x$ ？

【分析】 可利用 Young 定理。

【解】 如果若存在一二變數函數 $f(x, y)$ ，使得 $D_1 f(x, y) = 5y$ ， $D_2 f(x, y) = 2x$ ，則應有 $D_{12} f(x, y) = 5$ ， $D_{21} f(x, y) = 2$ ，又此二函數皆為連續，利用 Young 定理（參見拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十章 §10.2.）二者應該相等，顯然不真，故知原設之函數並不存在。

♠ (26-9) 試證不存在函數 $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ 。

【分析】 由原設二條件利用不定積分可解得帶常數之 f ，再尋找矛盾。

【證】我們將使用矛盾證法。假定存在函數 $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (2)$$

1° 考慮 $y > 0$,

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow f(x, y) &= -\int \frac{y}{x^2 + y^2} dx + g(y) \\ &= -\tan^{-1} \frac{x}{y} + g(y) \quad (*) \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} + g'(y). \\ \Rightarrow g'(y) &= 0, \quad (\because (2)) \\ \Rightarrow g(y) &= C_1, \quad (\text{任意固定常數}) \\ \Rightarrow f(x, y) &= -\tan^{-1} \frac{x}{y} + C_1, \quad (\text{代回 } (*).) \end{aligned}$$

2° 考慮 $y < 0$, 仿 1° 亦可得

$$f(x, y) = -\tan^{-1} \frac{x}{y} + C_2,$$

其內 C_2 為固定常數但非任意數, 否則 f 在點 $(x, 0)$ (其中 $x \neq 0$) 可能對 y 不為可偏微。

3° 沿直線 $x = 1$, 考慮以下二極限,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1, y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(-\tan^{-1} \frac{1}{y} + C_1 \right) = -\frac{\pi}{2} + C_1, \\ \lim_{y \rightarrow 0^-} f(1, y) &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(-\tan^{-1} \frac{1}{y} + C_2 \right) = \frac{\pi}{2} + C_2. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} f \text{ 在點 } (1,0) \text{ 對 } y \text{ 可偏微} &\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(1, y) \\ &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + C_1 = \frac{\pi}{2} + C_2 \\ &\Rightarrow C_1 - C_2 = \pi. \end{aligned}$$

4° 沿直線 $x = -1$, 考慮以下二極限,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} f(-1, y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(-\tan^{-1} \frac{-1}{y} + C_1 \right) = \frac{\pi}{2} + C_1, \\ \lim_{y \rightarrow 0^-} f(-1, y) &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(-\tan^{-1} \frac{-1}{y} + C_2 \right) = -\frac{\pi}{2} + C_2. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} f \text{ 在點 } (-1, 0) \text{ 對 } y \text{ 可偏微} &\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0^+} f(-1, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(-1, y) \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{2} + C_1 = -\frac{\pi}{2} + C_2 \\ &\Rightarrow C_1 - C_2 = -\pi. \end{aligned}$$

此與 3° 之結果相矛盾，是以本題得證。

● 可微、梯度與切面

♠ (26-10) 設 f 為一二變數函數。

- (a) 試界定『 f 在點 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ 為可微』；
 (b) 若 f 在點 $\mathbf{p}$ 為可微且 $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$ ，試證： f 在點 $\mathbf{p}$ 之方向導數 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$ ，
 ($\mathbf{v}$ 為單位向量) 有最大值，當 $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{|\nabla f(\mathbf{p})|}$ 。

分析 多變數函數之可微與單變數函數之可微，在定義上二者差異頗大，必須仔細探討方能理解其中之奧秘。

【解】(a) 設 $\mathbf{p}$ 為 D_f 之一內點，且偏導數 $D_1f(\mathbf{p})$ 及 $D_2f(\mathbf{p})$ 皆存在，若

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{p}) + D_1f(\mathbf{p})(x_1 - p_1) + D_2f(\mathbf{p})(x_2 - p_2)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|} = 0,$$

則稱 f 在點 $\mathbf{p}$ 為可微 (differentiable)，其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 。

- (b) 由於 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = |\nabla f(\mathbf{p})| \cos \theta$ ，其中 θ 為 $\nabla f(\mathbf{p})$ 與 $\mathbf{v}$ 之夾角，是以

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) \text{ 有最大值} &\Leftrightarrow \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} \text{ 與 } \nabla f(\mathbf{p}) \text{ 方向相同} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{|\nabla f(\mathbf{p})|}. \end{aligned}$$

♠ (26-11) 設

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{若 } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

試證： f 在點 $(0, 0)$ 為可微。

分析 利用上題有關「可微」之定義證之。

【證】先求 f 在點 $(0, 0)$ 之二偏導數,

$$D_1 f(\mathbf{p}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$D_2 f(\mathbf{p}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4}{h} = 0.$$

其次考慮可微之定義,

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - [f(0,0) + D_1 f(0,0)(x-0) + D_2 f(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{y^4}{x^2 + y^2} - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= 0, \quad (\text{見下面 } (\star)) \end{aligned}$$

故知 f 在點 $(0, 0)$ 爲可微.

($\star$) 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 其中 $r > 0$, 則 $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{r^4 \sin^4 \theta}{r^3} \\ &= r \sin^4 \theta \leq r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \end{aligned}$$

利用三明治原理可證得

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

♠ (26-12) 試求曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 過點 $(1, \sqrt{3}, 2)$ 之切面及法線方程式.

【分析】隱函數 $F(x, y, z) = 0$ 過點 (x_0, y_0, z_0) 之切面方程式爲

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

【解】令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, 則因

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, -2z),$$

知切面法向量之方向數爲 $\nabla F(1, \sqrt{3}, 2) = (2, 2\sqrt{3}, -4)$, 是以此曲面過點 $(1, \sqrt{3}, 2)$ 之切平面爲

$$\nabla F(1, \sqrt{3}, 2) \cdot (x - 1, y - \sqrt{3}, z - 2) = 0,$$

即

$$(x-1) + \sqrt{3}(y-\sqrt{3}) - 2(z-2) = 0.$$

法線為

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{z-2}{-2}.$$

♠ (26-13) 設函數 $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ ，試求：

- (a) u 在點 $(2, 1, 1)$ 處之梯度向量 ∇u ；
 (b) u 在點 $(2, 1, 1)$ 沿何方向有最大方向導數並求此最大方向導數。

分析 我們需要利用公式： $D_{\mathbf{v}}u(\mathbf{p}) = \mathbf{v} \cdot \nabla u(\mathbf{p})$ ，即方向導數等於單位向量 $\mathbf{v}$ 與梯度向量之內積。

【解】(a) 由於 u 之三偏導數分別為 $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x$ ， $\frac{\partial u}{\partial y} = 6y$ ， $\frac{\partial u}{\partial z} = 8z$ ，是以 f 在點 $(2, 1, 1)$ 之梯度向量為 $\nabla u(2, 1, 1) = (8, 6, 8)$ 。

(b) 由於 u 之三偏導數皆為連續函數，故知 u 在點 $(2, 1, 1)$ 沿單位方向 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 之方向導數為

$$D_{\mathbf{v}}u(2, 1, 1) = (v_1, v_2, v_3) \cdot \nabla u(2, 1, 1) = 8v_1 + 6v_2 + 8v_3.$$

又已知當 $\mathbf{v}$ 與 $\nabla f(2, 1, 1)$ 方向相同時，（亦即 $\frac{v_1}{8} = \frac{v_2}{6} = \frac{v_3}{8} > 0$ ），方向導數為最大，故只需令

$$v_1 = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{8}{\sqrt{164}} = \frac{4}{\sqrt{41}},$$

$$v_2 = \frac{6}{\sqrt{8^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{6}{\sqrt{164}} = \frac{3}{\sqrt{41}},$$

$$v_3 = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{8}{\sqrt{164}} = \frac{4}{\sqrt{41}},$$

$$\text{此時 } D_{\mathbf{v}}u(2, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{164}}(8^2 + 6^2 + 8^2) = 2\sqrt{41}.$$

♠ (26-14) 試問函數

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{若 } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 是否為連續可偏微？ f 於點 $(0, 0)$ 是否為可微？

分析 求解 f 在點 $(0, 0)$ 之偏導數時必須使用定義，在其他點上，可以使用定理。

【解】1° 由於 x, y 互換時， $f(x, y)$ 並不改變，是以只需討論 $D_1 f$ 之連續性。

• 當 $(x, y) = (0, 0)$ 時，利用偏導數之定義，

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{|x|}}{x} = 0.$$

• 當 $(x, y) \neq (0, 0)$ 時，

$$D_1 f(x, y) = 2x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

以下先討論 $D_1 f(x, y)$ 在點 $(0, 0)$ 之極限，令 $L = \{(x, y) \mid x > 0, y = 0\}$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_1 f|_L(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \text{ 不存在.}$$

是以 f 在點 $(0, 0)$ 不為連續可偏微。

2° 我們將以「可微」之定義討論 f 於點 $(0, 0)$ 是否為可微。對於極限

$$\begin{aligned} & \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - [f(0, 0) + D_1 f(0, 0)(x - 0) + D_2 f(0, 0)(y - 0)]}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned} \quad (*)$$

因 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ，而 $\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 為有界，是以 $(*)$ 式之極限為 0，故知 f 於點 $(0, 0)$ 為可微。

♠ (26-15) 設函數

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = \begin{cases} 2\sqrt{xy}, & \text{若 } xy \geq 0, \\ 0, & \text{若 } xy < 0. \end{cases}$$

- (a) 試求： $D_1 f(0, 0)$ 及 $D_2 f(0, 0)$ ；
 (b) 設單位向量 $\mathbf{v} = (a, a)$ 其中 $a = \sqrt{2}/2$ ，試求：方向導數 $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ ；
 (c) 試問 f 在點 $(0, 0)$ 是否為可微分。

【分析】(b) 題不可利用公式 $D_{\mathbf{v}} f(0, 0) = v_1 D_1 f(0, 0) + v_2 D_2 f(0, 0)$ ，理由是 f 在點 $(0, 0)$ 不滿足上式公式之前題：「 $D_1 f$ 及 $D_2 f$ 在點 $(0, 0)$ 之一鄰近為連續。」

【解】(a) f 在點 $(0, 0)$ 之二偏導數分別為：

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \\ D_2 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

(b) 利用方向導數之定義，

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(a, a)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2a|h| - 0}{h}.$$

但

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2a|h| - 0}{h} = 2a = \sqrt{2}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2a|h| - 0}{h} = -2a = -\sqrt{2},$$

二者不相等，故知方向導數 $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 不存在。

(c) 令

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= f(x, y) - f(0, 0) - D_1f(0, 0) \cdot x - D_2f(0, 0) \cdot y \\ &= f(x, y) = \begin{cases} 2\sqrt{xy}, & \text{若 } xy \geq 0, \\ 0, & \text{若 } xy < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

若 f 於點 $(0, 0)$ 為可微分，應有

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\eta(x, y)}{|(x, y) - (0, 0)|} = 0. \quad (*)$$

為方便計，令

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{\eta(x, y)}{|(x, y) - (0, 0)|} = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ L &= \{(x, y) \mid x = y \neq 0\}. \end{aligned}$$

則因

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g|_L(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\sqrt{2}|x|} = \sqrt{2} \neq 0.$$

是以 $(*)$ 不成立，函數 f 在點 $(0, 0)$ 不為可微分。

註：另一種證法：若 f 在點 $(0, 0)$ 為可微分，則對於任意單位向量 $\mathbf{v}$ ，方向導數 $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 皆存在，但由 (b) 題知某一方向導數不存在，故知 f 在點 $(0, 0)$ 不為可微分。

● 隱微分法

♠ (26-16) 設 $z = f(x, y) > 0$ 在區域 $I \times I$ 上為連續，且 $z + \ln z = xy$ 。試求：

(a) $\frac{\partial z}{\partial x}$ ；

(b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

分析

以隱微分法解之。

【解】(a) 對於方程式 $z + \ln z = xy$ ，視 z 為 x 之變數， y 為常數，左右兩端分別對 x 偏微之

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{zy}{z+1}.$$

同理，視 z 為 y 之變數， x 為常數，對 y 偏微之

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad (*)$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{zx}{z+1}.$$

(b) 至於求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ，

由 (*) 式之左右兩端分別對 x 偏微之，故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{-1}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1.$$

移項之，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1 + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1 + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{xyz^2}{(z+1)^2}}{1 + \frac{1}{z}} \\ &= \frac{z(1+z)^2 + xyz}{(1+z)^3}. \end{aligned}$$

§ 27 極值問題(多變數)

多變數函數極值問題分以下二類：

甲．無限制條件之極值問題：利用二階偏導數檢定法 (second partial derivative test)(亦稱為 Hessian 行列式檢定法)．此類問題主要的困難有二點：

(1) 若 f 在 $N_\delta(\mathbf{p})$ 上為二階連續可偏微; $D_1f(\mathbf{p}) = D_2f(\mathbf{p}) = 0$, 且 Hessian 行列式

$$\Delta(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} D_{11}f(\mathbf{p}) & D_{12}f(\mathbf{p}) \\ D_{21}f(\mathbf{p}) & D_{22}f(\mathbf{p}) \end{vmatrix} > 0;$$

我們可以判定 f 在點 $\mathbf{p}$ 有相對極值，但是否有絕對極值？

(2) 如果 Hessian 行列式 $\Delta(\mathbf{p}) = 0$ ，下一步該如何？以判定 f 在點 $\mathbf{p}$ 是否有極值。

乙．限制條件之極值問題：其解法有

- Lagrange 乘數法；如何判定函數在所求得之臨界點，是否具有極值，是絕對極值嗎？
- Cauchy 不等式法；
- 算幾不等式法．

參考資料：拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十章 § 10.5.

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

● 無限制條件之極值

♠ (27-1) 設函數 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$.

(a) 試問 f 於何處有極值？是極大或是極小？

(b) 若 $g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{若 } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

試問 g 於何處有極值？是極大或是極小？

分析 (a) 題是傳統的二變數極值問題，(b) 題則是觀念性問題，函數在點 $(0,0)$ 「跳」上去，應設法說明其有相對極大值。

【解】 (a) 先求 f 之一、二階偏導數，

$$D_1f(x, y) = 2x - 4y, \quad D_2f(x, y) = -4x + 3y^2 + 4,$$

$$D_{11}f(x, y) = 2, \quad D_{12}f(x, y) = -4, \quad D_{21}f(x, y) = -4,$$

$$D_{22}f(x, y) = 6y.$$

次求臨界點，因

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = 0 \\ D_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0, \end{cases}$$

由第一式 $x = 2y$ ，代入第二式得 $3y^2 - 8y + 4 = 0$ ，可解得

$$y \in \{2, 2/3\}, \quad x = 2y \in \{4, 4/3\}.$$

又因 f 無不可偏微之點，亦無 D_f 之非內點，故僅有 $(4, 2)$, $(4/3, 2/3)$ 二臨界點。其次，

$$\Delta(4, 2) = \begin{vmatrix} D_{11}f(4, 2) & D_{12}f(4, 2) \\ D_{21}f(4, 2) & D_{22}f(4, 2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} > 0,$$

且 $D_{11}f(4, 2) > 0$ 知 f 於點 $(4, 2)$ 有相對極小，但非絕對極小，理由是：

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^3 + 4y = -\infty.$$

又

$$\Delta(4/3, 2/3) = \begin{vmatrix} D_{11}f(4/3, 2/3) & D_{12}f(4/3, 2/3) \\ D_{21}f(4/3, 2/3) & D_{22}f(4/3, 2/3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} < 0,$$

知 f 於點 $(4/3, 2/3)$ 無極值。

- (b) g 之極值點除 $(0, 0)$ 外與 f 相同，即 g 於點 $(4, 2)$ 有相對極小，而於點 $(4/3, 2/3)$ 無極值，今考慮 g 於點 $(0, 0)$ ，因

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 - 4xy + y^3 + 4y) = 0,$$

知 g 於 $(0, 0)$ 之某一去心鄰近 $N_\delta^*(0, 0)$ ，函數值必小於 $1 = g(0, 0)$ ，是以 g 於 $(0, 0)$ 有相對極大。

♠ (27-2) 試求函數 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ 於何處有極大，於何處有極小。

分析

先由 f 之一階偏導數解出臨界點，再以二階偏導數判別是否有極值。

【解】 1° 先求 f 之一、二階偏導數，

$$D_1 f(x, y) = 4(x^3 - (x - y)),$$

$$D_2 f(x, y) = 4(y^3 + (x - y)),$$

$$D_{11} f(x, y) = 4(3x^2 - 1),$$

$$D_{12} f(x, y) = D_{21} f(x, y) = 4,$$

$$D_{22} f(x, y) = 4(3y^2 - 1),$$

則

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} D_1 f(x, y) = 0 \\ D_2 f(x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0 & (1) \\ y^3 + x - y = 0 & (2) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0, & ((1) + (2)) \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ y = -x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}.
 \end{aligned}$$

知 f 之臨界點有 $(0, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

2° 討論：首先 Hessian

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} D_{11}f(x, y) & D_{12}f(x, y) \\ D_{21}f(x, y) & D_{22}f(x, y) \end{vmatrix} = 16(9x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2).$$

(i) 因 $\Delta(0, 0) = 0$ ，須另行討論，

令 $h(x) = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) \leq 0 = h(0), \forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ，
知 h 於原點有相對極大值。

令 $g(x) = f(x, x) = 2x^4 \geq 0 = g(0), \forall x \in \mathbb{R}$ ，知 g 於原點有最小值。故
知， f 於 $(0, 0)$ 無極值。

(ii) $\Delta(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 384 > 0$ ， $D_{11}f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$ ，知 f 於 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
有相對極小值 $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$ 。

(iii) $\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$ ， $D_{11}f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$ ，知 f 於 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
有相對極小值 $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$ 。

註： 若問 f 在點 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 及 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 是否有絕對極小，答案是肯定的，理由如下：

設集合 $S = \{(x, y) | x^4 + y^4 \leq 10000\}$ (類似半徑等於 10 之圓形)，則 S 為一有界閉集，即緊緻集合，而 f 為連續函數，故 f 在 S 上必有最大值及最小值，然在 S 之邊界 $\{(x, y) | x^4 + y^4 = 10000\}$ 上，顯有

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 = 10000 - 2(x - y)^2 > 0.$$

故 f 在 S 上之最小值應為 $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$ ，而在 S 之外， f 之值更大，不可能有負值，結論： f 在 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 有最小。

♠ (27-3) $\triangle ABC$ 內求一點 P ，使點 P 至三邊之距離乘積為最大。並問點 P 稱為什麼心？

分析 設 P 至三邊之距離分別為 x, y, z ，顯然有 $ax + by + cz = 2\Delta$ ， Δ 表 $\triangle ABC$ 之面積。再求三者之積 xyz 之極值。

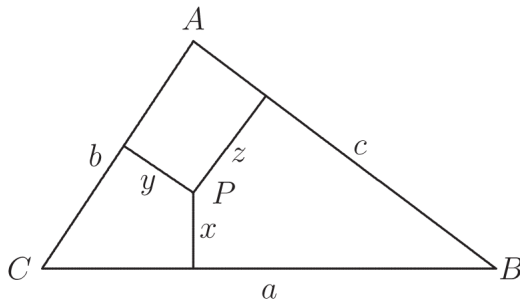


圖 27-1

【解】法一：設 $\triangle ABC$ 之三邊長分別為 a, b, c ，任意點 P 至三邊之距離分別為 x, y, z ，次設 Δ 表 $\triangle ABC$ 之面積，顯然有

$$ax + by + cz = 2\Delta,$$

故 $z = (2\Delta - ax - by)/c$ ，三距離之積為 $xyz = xy(2\Delta - ax - by)/c$ 。令

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = xy(2\Delta - ax - by)/c,$$

其中 $D_f = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 2\Delta - ax - by \geq 0\}$ (此為一直角三角形區域)，我們將求 f 之絕對極大值。為此，

1° 先求 f 之一階及二階偏導函數，

$$D_1 f(x, y) = (2y\Delta - 2axy - by^2)/c,$$

$$D_2 f(x, y) = (2x\Delta - ax^2 - 2bxy)/c,$$

$$D_{11} f(x, y) = -2ay/c, \quad D_{12} f(x, y) = (2\Delta - 2ax - 2by)/c,$$

$$D_{22} f(x, y) = -2bx/c.$$

2° 次求 f 之臨界點，由

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = 0 \\ D_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y\Delta - 2axy - by^2 = 0 \\ 2x\Delta - ax^2 - 2bxy = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\Delta - 2ax - by = 0 \\ 2\Delta - ax - 2by = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 2ax + by = ax + 2by$$

$$\Rightarrow ax = by \quad (3)$$

(5) 代回 (3) 式及 (4) 式，解得

$$x = \frac{2\Delta}{3a}, \quad y = \frac{2\Delta}{3b},$$

(注意： $x = 0$ 或 $y = 0$ 之解與題意不符，故不取)，以此值代入判別式

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(x, y) & D_{12}f(x, y) \\ D_{21}f(x, y) & D_{22}f(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{4a\Delta}{3bc} & -\frac{2\Delta}{3c} \\ -\frac{2\Delta}{3c} & -\frac{4b\Delta}{3ac} \end{vmatrix} = \frac{12\Delta^2}{9c^2} > 0,$$

而 $D_{11}f\left(\frac{2\Delta}{3a}, \frac{2\Delta}{3b}\right) = -\frac{4a\Delta}{3bc} < 0$ ，故此時 f 有相對極大，又因 D_f 為一有界閉集合（即緊緻集合），而 f 為一連續函數，故知 f 之必有最大值，而 $(x, y) = (2\Delta/3a, 2\Delta/3b)$ 為唯一有相對極大之點，是以， f 在此點有絕對極大。此時， $z = (2\Delta - ax - by)/c = 2\Delta/3c$ ，總之，當

$$x = \frac{2\Delta}{3a}, \quad y = \frac{2\Delta}{3b}, \quad z = \frac{2\Delta}{3c}$$

時，乘積 xyz 有最大值。此點 P 為 $\triangle ABC$ 之重心，理由是：點 P 距 BC 邊為點 A 距 BC 邊之 $1/3$ ，點 P 距其他二邊情形亦同。

法二：利用算幾不等式。設 $\triangle ABC$ 之三邊長分別為 a, b, c ，任意點 P 至三邊之距離分別為 x, y, z ，次設 Δ 表 $\triangle ABC$ 之面積，顯然有

$$ax + by + cz = 2\Delta, \quad (1)$$

由於 a, b, c, x, y, z 皆為正數，利用算幾不等式。恆有

$$\begin{cases} \sqrt[3]{axbycz} \leq \frac{ax + by + cz}{3} = \frac{2\Delta}{3}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{axbycz} = \frac{ax + by + cz}{3} = \frac{2\Delta}{3} \Leftrightarrow ax = by = cz, \end{cases} \quad (3)$$

由 (2) 式知， $xyz \leq \frac{1}{abc}\left(\frac{2\Delta}{3}\right)^3$ ，設右端為 K ，此乃說明三數之乘積恆小於或等於 K ，又由 (3) 式知，當

$$ax = by = cz \quad (4)$$

時，三數之乘積等於 K 。其次由 (4) 式代入原設限制條件 (1) 式，得 $3ax = 2\Delta$ ，即 $x = \frac{2\Delta}{3a}$ ，復由 (4) 式得 $y = \frac{2\Delta}{3b}$ ， $z = \frac{2\Delta}{3c}$ 。換言之，當

$$x = \frac{2\Delta}{3a}, \quad y = \frac{2\Delta}{3b}, \quad z = \frac{2\Delta}{3c}$$

時，點 P 至三邊之距離乘積為最大。

♥ (27-4) 設三個非負實數之和等於常數 S ，求此三數乘積之極值。

分析

三數 x, y, z 之積 xyz 可化為 $xy(S - x - y)$ ，再求其極值。

【解】法一：設三數之乘積為

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = xyz = xy(S - x - y) = xyS - x^2y - xy^2,$$

其中 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq S\}$.

1° 先求 f 之一階及二階偏導函數，

$$D_1f(x, y) = yS - 2xy - y^2, \quad D_2f(x, y) = xS - x^2 - 2xy,$$

$$D_{11}f(x, y) = -2y, \quad D_{12}f(x, y) = S - 2x - 2y,$$

$$D_{21}f(x, y) = S - 2x - 2y, \quad D_{22}f(x, y) = -2x.$$

2° 其次，由 $\begin{cases} D_1f(x, y) = 0, \\ D_2f(x, y) = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} yS - 2xy - y^2 = 0 & (1) \\ xS - x^2 - 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

顯然當 $x \neq 0 \neq y$ 時，可得

$$\begin{cases} S - 2x - y = 0 & (3) \\ S - x - 2y = 0 & (4) \end{cases}$$

(3) - (4) 後化簡，可得 $y = x$ ，代回 (3) 式，得 $x = y = S/3$ ，換言之，
 $(x, y) = (\frac{S}{3}, \frac{S}{3})$ 為 f 之一臨界點，此時，Hessian 為

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{11}f(x, y) & D_{12}f(x, y) \\ D_{21}f(x, y) & D_{22}f(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}S & -\frac{1}{3}S \\ -\frac{1}{3}S & -\frac{2}{3}S \end{vmatrix} > 0,$$

且 $D_{11}f(\frac{S}{3}, \frac{S}{3}) = -\frac{2}{3}S < 0$ ，知 f 於點 $(x, y) = (\frac{S}{3}, \frac{S}{3})$ 有相對極大值。

3° 由於 f 連續於有界閉集合 A ， f 必有最大值及最小值，只需比較 f 在諸臨界點之值，

- 在 A 之邊界上之點 (x, y) 均為 $x = 0$ 或 $y = 0$ 或 $x + y = S$ ，此時，
 $f(x, y) = 0$ (最小值)。
- $f(\frac{S}{3}, \frac{S}{3}) = \frac{S^3}{27}$ ，此為最大值。換言之，三數相等時其積為最大。

法二：利用算幾不等式。恆有

$$\begin{cases} \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} = \frac{S}{3}, \\ \sqrt[3]{xyz} = \frac{x+y+z}{3} = \frac{S}{3} \Leftrightarrow x = y = z, \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{S^3}{27}, \\ xyz = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{S^3}{27} \Leftrightarrow x = y = z, \end{cases}$$

換言之，當 $x = y = z$ 時，三數乘積為最大。顯然三者之一為 0 時，三數乘積為最小。

♠ (27-5) 設 $(a_1, b_1) = (-1, -1)$, $(a_2, b_2) = (0, 0)$, $(a_3, b_3) = (0, 3)$, $(a_4, b_4) = (5, 6)$ 為 $\mathbb{R}^2$ 平面上之四點，試求點 $P(x, y)$ 使得點 P 與以上四點距離之平方和為最小。

分析 求「距離」之極值時，函數常出現 $\sqrt{\quad}$ (根號)，計算時不太方便計，通常我們將它改為求「距離平方」之極值，二者所得之「極值點」完全相同。有了極值點後再求「距離」之極值已無任何困難。

【解】 設已知四點 (a_j, b_j) , $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ，與點 $P(x, y)$ 之距離之平方和為函數

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = \sum_{j=1}^4 ((x - a_j)^2 + (y - b_j)^2).$$

首先求 f 之一階及二階偏導函數，

$$D_1 f(x, y) = 2 \sum_{j=1}^4 (x - a_j) = 2 \cdot (4x - \sum_{j=1}^4 a_j),$$

$$D_2 f(x, y) = 2 \sum_{j=1}^4 (y - b_j) = 2 \cdot (4y - \sum_{j=1}^4 b_j),$$

$$D_{11} f(x, y) = 2 \cdot 4 = 8, \quad D_{12} f(x, y) = 0, \quad D_{22} f(x, y) = 2 \cdot 4 = 8,$$

令 $D_1 f(x, y) = 0$, $D_2 f(x, y) = 0$ ，得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 a_j = 1, \\ y = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 b_j = 2, \end{cases}$$

是以 $(1, 2)$ 為唯一臨界點，此外，又因 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ，Hessian 判別式

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{11} f(x, y) & D_{12} f(x, y) \\ D_{21} f(x, y) & D_{22} f(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64,$$

恆正 (與 x, y 無關), $D_{11}f(x, y) = 8 > 0$ 亦恆正, 故知函數 f 在點 $P(1, 2)$ 有絕對極小. 亦即點 $P(1, 2)$ 與原設四點距離之平方和為最小.

註：以一、二階偏導數判別極值時，通常將臨界點代入 Hessian 行列式內，此時可判定數在此點有相對極大、有相對極小或無極值，然而當一階偏導數皆為 0，而 Hessian 恆正時，利用推廣之 Taylor 定理，吾人可判定函數在此點具最大或最小值.

♠ (27-6) 試求函數 $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ 之極值.

分析 在找到 f 之臨界點後，如果它的 Hessian 行列式之值為 0，利用「二階偏導數檢定法」無法判別在此點是否有極值，必須另行尋找充分之理由以判別之.

【解】 1° 先求 f 之一階及二階偏導函數，由於 $f(x, y) = y^2 - yx^3 - x^2y + x^5$ ，是以

$$D_1f(x, y) = -3x^2y - 2xy + 5x^4, \quad D_2f(x, y) = 2y - x^3 - x^2,$$

$$D_{11}f(x, y) = -6xy - 2y + 20x^3, \quad D_{12}f(x, y) = -2x - 3x^2, \quad D_{22}f(x, y) = 2.$$

$$2^\circ \text{ 由 } \begin{cases} D_1f(x, y) = 0, \\ D_2f(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{即}$$

$$\begin{cases} -3x^2y - 2xy + 5x^4 = 0 & (1) \\ 2y - x^3 - x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 式得 $y = \frac{x^3 + x^2}{2}$ ，代入 (1) 式，並分解之，得

$$-\frac{1}{2}x^3(3x - 2)(x - 1) = 0,$$

故 x 之三根為 0, $2/3$, 1，是以 f 之臨界點有 $(0, 0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{10}{27})$, $(1, 1)$.

3° Hessian 行列式

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= \begin{vmatrix} D_{11}f(x, y) & D_{12}f(x, y) \\ D_{21}f(x, y) & D_{22}f(x, y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -6xy - 2y + 20x^3 & -2x - 3x^2 \\ -2x - 3x^2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4y + 28x^3 - 12xy - 9x^4 - 4x^2. \end{aligned}$$

- 在點 $(0, 0)$ ，由於 $\Delta(0, 0) = 0$ ，不能判別，需另行設法。考慮沿 X 軸，因 $f(x, 0) = x^5$ 為遞增函數，知 f 沿 X 軸在原點無極值，所以 f 在點 $(0, 0)$ 無極值。

- 在點 $(1, 1)$, 因 $\Delta(1, 1) = -4 + 28 - 12 - 9 - 4 < 0$, 知 f 於 $(1, 1)$ 無極值.
- 在點 $(\frac{2}{3}, \frac{10}{27})$, 由於 $\Delta(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) = \frac{8}{27} > 0$, 且 $D_{22}f(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) = 2 > 0$,
是以知 f 在點 $(\frac{2}{3}, \frac{10}{27})$ 有相對極小. 但非最小值, 因

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty.$$

♠ (27-7) 設函數 $f(x, y) = x^y$, $x > 0, y \geq 0$. 試求 $(x_0, y_0) = ?$ 時, 可使

$$D_1 f(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

並問 f 在該點 (x_0, y_0) 是否有極值? 為何? 若有, 則是何種極值?

分析 本題之目的在於考驗不能使用「二階偏導數檢定法」時, 應該如何解決問題, 方法不唯一, 只要能判別是否有極值.

【解】 因 $f(x, y) = x^y = \exp(y \ln x)$, 是以

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = x^y \cdot \frac{y}{x} = yx^{y-1}, \\ D_2 f(x, y) = x^y \cdot \ln x. \end{cases}$$

由 $D_1 f(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = 0$, 得 $x_0 = 1, y_0 = 0$. 但點 $(1, 0)$ 在 f 定義域

$$D_f = (0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

之邊界, 不可用 Hessian 判別, 需另行設法, 令

$$C = \{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x > 0\}, \text{ (過點 } (1, 0) \text{ 之拋物線)}$$

由於

$$f|_C(x, y) = x^{(x-1)^2} \begin{cases} > 1, & \text{若 } x > 1, \\ = 1 = f(1, 0), & \text{若 } x = 1, \\ < 1, & \text{若 } 0 < x < 1, \end{cases}$$

故知制限函數 $f|_C$ 在點 $(1, 0)$ 無極值, 因此 f 在點 $(1, 0)$ 無極值.

♠ (27-8) 試求 a 與 b 使得 $F(a, b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ 有最小值.

分析 先求出 $F(a, b)$, 再依步驟解極值問題.

【解】 1° 先求積分值,

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \\ &= \int_0^1 (x^4 - 2ax^3 - 2bx^2 + a^2x^2 - 2abx + b^2) dx \\ &= ab - \frac{2}{3}b - \frac{a}{2} + b^2 + \frac{1}{5} + \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

2° 次求 F 之極小值. 因

$$D_1F(a, b) = b - \frac{1}{2} + \frac{2a}{3}, \quad D_2F(a, b) = a - \frac{2}{3} + 2b,$$

$$D_{11}F(a, b) = \frac{2}{3}, \quad D_{12}F(a, b) = 1, \quad D_{22}F(a, b) = 2.$$

由 $\begin{cases} D_1F(a, b) = 0, \\ D_2F(a, b) = 0, \end{cases}$ 可解得 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$, 此時, Hessian

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{11}F(a, b) & D_{12}F(a, b) \\ D_{21}F(a, b) & D_{22}F(a, b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad (\text{與 } a, b \text{ 無關})$$

且 $D_{11}F(a, b) = \frac{2}{3} > 0$, 是以 F 在點 $(1, -1/6)$ 有最小值.

● 有限制條件之極值

部分「有限制條件之極值問題」, 有時可化爲「無限制條件之極值問題」, 讀者可參閱本單元 (27-3), (27-4) 題.

♠ (27-9) 設 $a_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$, 試求 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ 之極大值及極

小值於條件 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ 之限制下.

分析 利用 Cauchy 不等式 (拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十章 §10.5.) 遠較其他方法方便.

【解】 由 Cauchy 不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

是以

$$-\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}.$$

此外,

- 若存在常數 $k > 0$ 使得 $x_i = k a_i, \forall i = 1, \dots, n$, 則 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}$;
- 若存在常數 $k < 0$ 使得 $x_i = k a_i, \forall i = 1, \dots, n$, 則 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = -\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}$;

故知 $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}$ 及 $-\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}$ 分別爲 $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ 之最大及最小值.

♠ (27-10) 設 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = 2x^4 + 3y^3 - x^2y$.

- (a) 試求 f 之臨界點 (critical points), 並問於其上是否有相對極大或相對極小值?
 (b) 在條件 $x^2 + y = 0$ 下, f 是否有最大值及最小值? 若有, 則求之.

分析

(a) 題之臨界點中有 Hessian 行列式值為 0, 須設法說明有無極值. (b) 題使用代入法比使用 Lagrange 乘數法為佳, 因為較容易判別絕對極值.

【解】(a) 先求 f 之一、二階偏導數及臨界點.

$$D_1f(x, y) = 8x^3 - 2xy, \quad D_2f(x, y) = 9y^2 - x^2,$$

$$D_{11}f(x, y) = 24x^2 - 2y, \quad D_{12}f(x, y) = -2x,$$

$$D_{21}f(x, y) = -2x, \quad D_{22}f(x, y) = 18y.$$

由

$$\begin{cases} D_1f(x, y) = 0, \\ D_2f(x, y) = 0. \end{cases}$$

得聯立方程式

$$\begin{cases} 8x^3 - 2xy = 0 & (1) \\ 9y^2 - x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

由 (1) 式, 知 $x = 0$ 或者 $y = 4x^2$; 當 $x = 0$ 時, 由 (2) 式, 則得 $y = 0$, 當 $y = 4x^2$ 時, 由 (2) 式得, $y = 1/36$, 此時, $x = \pm 1/12$, 換言之, f 之臨界點集為

$$\left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{36} \right), \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{36} \right) \right\}.$$

討論: 由於

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= \begin{vmatrix} D_{11}F(x, y) & D_{12}F(x, y) \\ D_{21}F(x, y) & D_{22}F(x, y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 24x^2 - 2y & -2x \\ -2x & 18y \end{vmatrix} = 432x^2y - 36y^2 - 4x^2, \end{aligned}$$

- $\Delta\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{36}$, 且 $D_{11}f\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{9} > 0$, 知 f 在點 $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{36}\right)$ 有相對極小.
- 在點 $\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{36}\right)$ 結果相同.
- 在點 $(0, 0)$, 因 $\Delta(0, 0) = 0$, 需另行設法, 沿 Y 軸, 令

$$h(y) = f(0, y) = 3y^3,$$

顯然為遞增函數, 即 h 在點 0 無極值, 換言之, f 在點 $(0, 0)$ 無極值.

(b) 沿 $y = -x^2$, 令

$$g(x) = f(x, -x^2) = 2x^4 - 3x^6 + x^4 = 3x^4 - 3x^6,$$

應有

$$g'(x) = 12x^3 - 18x^5 = 6x^3(2 - 3x^2),$$

因

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}\}.$$

x	$-\sqrt{2/3}$	0	$\sqrt{2/3}$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
說明	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

又 $g(\sqrt{2/3}) = g(-\sqrt{2/3}) = \frac{4}{9}$, 知「沿 $y = -x^2$ 」, 當

$$(x, y) \in \left\{ (\sqrt{2/3}, -2/3), (-\sqrt{2/3}, -2/3) \right\}$$

f 有最大值 $4/9$, 但因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, 故知 f 無最小值. (註: g 在點 0 有相對極小值.)

♠ (27-11) 設某廠商每月總共花費 60 萬元在薪資、利息及原料上, 若 x, y, z 分別表此三項之支出 (單位: 萬元), 若其月收益為 $P(x, y, z) = \frac{2xy + 2yz + 3zx}{10}$ (單位: 萬元), 試求每月每項支出各多少可使其收益為最大, 什麼情況又使其收益為最小.

分析 Lagrange 乘數法所得之臨界點未必為函數之絕對極值點, 必須加以另行舉證和討論.

【解】 為方便計, 以下各值皆以萬元為單位.

1° 利用 Lagrange 乘數法, 令

$$F(x, y, z, \lambda) = \frac{2xy + 2yz + 3zx}{10} + \lambda(x + y + z - 60).$$

由 F 對各變數之偏導數皆為 0, 可得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0.2y + 0.3z + \lambda = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.2x + 0.2z + \lambda = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0.3x + 0.2y + \lambda = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 60 = 0, \quad (4)$$

由 $10 \cdot ((1) + (3)) - 15 \cdot (2)$ 得 $4y + 5\lambda = 0$, 即

$$y = -\frac{5\lambda}{4} \quad (5)$$

又由 (2) 式得

$$x + z = -5\lambda \quad (6)$$

(5), (6) 兩式代入 (4) 式, 解得 $\lambda = -9.6$, 代回 (5) 式, 可得 $y = 12$; 再由 (1), (3) 解得 $x = z = 24$.

2° 討論: 令

$$E = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 60\}.$$

E 為一緊緻集合, 而 P 為連續, 故 P 必有最大與最小, 其可能發生極值之處除點 $(24, 12, 24)$ 外, 尚須考慮 E 之邊界 $= A \cup B \cup C$ (如圖), 其中

$$A = \{(x, y, z) \in E \mid x = 0\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in E \mid y = 0\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in E \mid z = 0\}.$$

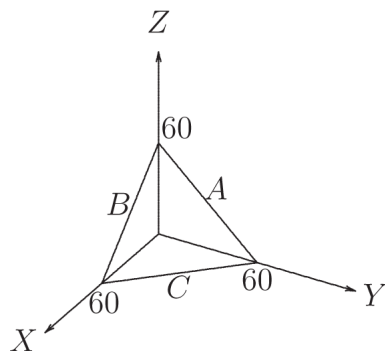


圖 27-2

- ① 在 A 上, $P = 0.2yz = 0.2y(60 - y)$, 利用單變數極值方法, 知當 $y = z = 30$ 時, P 之最大值為 180, 當 $yz = 0$ 時可得其最小值 0.
- ② 在 B 上, $P = 0.3xz = 0.3x(60 - x)$, 仿 ① 知當 $x = z = 30$ 時, P 之最大值為 270, 當 $xz = 0$ 時可得其最小值 0.
- ③ 在 C 上, $P = 0.2xy = 0.2x(60 - x)$, 仿 ① 知當 $x = y = 30$ 時, P 之最大值為 180, 當 $xy = 0$ 時可得其最小值 0.
- ④ 而 $P(24, 12, 24) = \frac{2 \cdot 24 \cdot 12 + 2 \cdot 12 \cdot 24 + 3 \cdot 24 \cdot 24}{10} = 288$.

結論: 每月支出薪資、利息及原料分別為 24, 12, 24 萬元時, 有最大收益, 三項中有二項支出為 0 時, 收益最小.

♠ (27-12) 設曲線 C 為 $z^2 = x^2 + y^2$ 及 $z = 1 + x + y$ 之交集, 試求 C 上距原點最近之點.

分析 $z^2 = x^2 + y^2$ 為一正圓錐, 頂點在原點, 上下二部分對稱. $z = 1 + x + y$ 為一平面, 其梯度向量 $\nabla z = (1, 1)$, 即最大方向導數為 $|\nabla z| = \sqrt{2}$, 由於此值大於 1, 故此平面與圓錐曲面交集為一雙曲線, 我們將以二限制條件之 Lagrange 乘數法解之.

【解】曲線 C 上一點 (x, y, z) 和原點之距離為 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，為方便計，我們求其平方 $x^2 + y^2 + z^2$ 在限制條件 $z^2 = x^2 + y^2$ 及 $z = 1 + x + y$ 下之極小值，利用 Lagrange 乘數法，令

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) + \mu(1 + x + y - z),$$

$$\text{則由 } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0, \text{ 即}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2x\lambda + \mu = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2y\lambda + \mu = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 2z\lambda - \mu = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 1 + x + y - z = 0 \quad (5)$$

由 (1), (2) 兩式可解得 $x = y$ 或 $\lambda = -1$ ，(但 $\lambda = -1$ 代入 (1) 式得 $\mu = 0$ ，再代入 (3) 式可得 $z = 0$ ，由 (4) 式得 $x = 0, y = 0$ ，與 (5) 式相矛盾，不可能)。以 $x = y$ 代入 (4) 式解得 $z = \pm\sqrt{2}x$ ，再代入 (5) 式，得二解

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{-1}{2 - \sqrt{2}}, \frac{-1}{2 - \sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right),$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2} + 2}, \frac{-1}{\sqrt{2} + 2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} \right).$$

此二點和原點之距離分別為

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{2} + 2,$$

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = 2 - \sqrt{2},$$

是以知 C 上與原點最接近之點為 $(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2} + 2}, \frac{-1}{\sqrt{2} + 2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} \right)$ 。

註： (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2) 應為此平面與圓錐曲面交集之雙曲線之二頂點，二者和原點之距離不相等。

§ 28 Taylor 公式(多變數)與近似值

我們僅回顧最簡單的「二變數二階 Taylor 定理」：設 f 在 $N_\epsilon(\mathbf{p})$ 上為二階連續可偏微，對於 $(x, y) \in N_\epsilon^*(\mathbf{p})$ ， $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x, y) = f(\mathbf{p}) + \left(h_1 D_1 f(\mathbf{p}) + h_2 D_2 f(\mathbf{p}) \right) + \frac{1}{2!} \left(h_1^2 D_{11} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) + 2h_1 h_2 D_{12} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) + h_2^2 D_{22} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) \right).$$

其中 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ， $\mathbf{h} = (x, y) - (p_1, p_2) = (h_1, h_2)$.

其中之第二項 $h_1 D_1 f(\mathbf{p}) + h_2 D_2 f(\mathbf{p})$ 等於 f 在點 $\mathbf{p}$ 之全微分 $df(\mathbf{p}, \mathbf{h})$ ，當 $|\mathbf{h}|$ 很小時， $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ 與 $df(\mathbf{p}, \mathbf{h})$ 之差異較 $|\mathbf{h}|$ 更微不足道，我們可以 $df(\mathbf{p}, \mathbf{h})$ 做為 $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ 之近似值。不過今日人手一台各式電腦或手機，這種方法之重要性已大不如前。

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

♠ (28-1) 試以 $df(\mathbf{p}, \mathbf{h})$ 作為 $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ 之近似值的方法，求 $\sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$ 之近似值。

分析 二變數函數之全微分為 $df(\mathbf{p}, \mathbf{h}) = D_1 f(\mathbf{p})h_1 + D_2 f(\mathbf{p})h_2$ ，其中 $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ，當 $|\mathbf{h}|$ 甚小時， $df(\mathbf{p}, \mathbf{h})$ 可以作為 $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ 之近似值。

【解】 令 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，則當 $\mathbf{p} = (3, 4)$ ， $\mathbf{h} = (0.01, -0.03)$ 時，原題 = $f(\mathbf{p} + \mathbf{h})$ ，我們將以 $f(\mathbf{p}) + df(\mathbf{p}, \mathbf{h})$ 為其近似值。由於

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (2x) = x \cdot (x^2 + y^2)^{-1/2}, \\ D_2 f(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (2y) = y \cdot (x^2 + y^2)^{-1/2}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) + df(\mathbf{p}, \mathbf{h}) &= f(3, 4) + 0.01 \cdot D_1 f(3, 4) - 0.03 \cdot D_2 f(3, 4) \\ &= 5 + 0.01 \cdot \frac{3}{5} - 0.03 \cdot \frac{4}{5} = 4\frac{491}{500} = 4.982. \end{aligned}$$

亦即 $\sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$ 之近似值為 4.982。

♠ (28-2) 設 $f(x, y) = \frac{2 + \sqrt{x}}{3 + \sqrt{y}}$.

(a) 試寫出 $f(x, y)$ 在點 $(9, 4)$ 之二階 Taylor 公式；

- (b) 試求 $f(8.98, 4.01) = \frac{2 + \sqrt{8.98}}{3 + \sqrt{4.01}}$ 之近似值, (只求至第一階偏導數);
- (c) 試問此時誤差絕對值是否小於 10^{-4} ?

分析 求解近似值的工作與上題完全相同, 但求誤差絕對值之上界 (即 $|R_2|$ 之上界) 卻十分麻煩, 也因此降低了這種方法的優點與其實用價值.

【解】 (a) $f(x, y)$ 在點 $\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (9, 4)$ 之二階 Taylor 公式為

$$f(x, y) = f(p_1, p_2) + h_1 \cdot D_1 f(p_1, p_2) + h_2 \cdot D_2 f(p_1, p_2) + R_2,$$

其中 $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$R_2 = \frac{1}{2} \left[h_1^2 D_{11} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) + 2h_1 h_2 D_{12} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) + h_2^2 D_{22} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) \right], \theta \in (0, 1).$$

(b) 由於

$$D_1 f(x, y) = \frac{1}{2} x^{-1/2} (3 + y^{1/2})^{-1}, \quad D_1 f(9, 4) = \frac{1}{2} 9^{-1/2} (3 + 4^{1/2})^{-1} = \frac{1}{30},$$

$$D_2 f(x, y) = \frac{-1}{2} y^{-1/2} (2 + x^{1/2}) (3 + y^{1/2})^{-2},$$

$$D_2 f(9, 4) = \frac{-1}{2} 4^{-1/2} (2 + 9^{1/2}) (3 + 4^{1/2})^{-2} = -\frac{1}{20}.$$

令 $x = 8.98$, $y = 4.01$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (9, 4)$, $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = (-0.02, 0.01)$, 則 $f(8.98, 4.01) = f(x, y)$ 之近似值為

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) + h_1 D_1 f(\mathbf{p}) + h_2 D_2 f(\mathbf{p}) &= \frac{2+3}{3+2} - 0.02 \cdot \frac{1}{30} - 0.01 \cdot \frac{1}{20} \\ &= 0.99883. \end{aligned}$$

(c) 誤差則為

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2} \left[(-0.02)^2 D_{11} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) + 2(-0.02)(0.01) D_{12} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) \right. \\ &\quad \left. + (0.01)^2 D_{22} f(\mathbf{p} + \theta \mathbf{h}) \right]. \end{aligned}$$

我們先求 $D_{11} f(x, y)$, $D_{12} f(x, y)$ 及 $D_{22} f(x, y)$, 再求 $|R_2|$ 之上界.

(i) 因

$$D_{11} f(x, y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) (3 + y^{1/2})^{-1},$$

故當 $4 < x < 9$, $4 < y < 9$ 時,

$$|D_{11} f(x, y)| < \frac{1}{4} \cdot 4^{-3/2} (3 + 4^{1/2})^{-1} = \frac{1}{160}.$$

因此, $|D_{11} f(9 - 0.02\theta, 4 + 0.01\theta)| < \frac{1}{160}$.

(ii) 因

$$\begin{aligned} D_{12}f(x, y) &= -\frac{1}{4} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{-1/2} \cdot (3 + y^{1/2})^{-2} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot x^{-1/2} \cdot (9y^{1/2} + y^{3/2} + 6y)^{-1}, \end{aligned}$$

故當 $4 < x < 9$, $4 < y < 9$ 時,

$$|D_{12}f(x, y)| < \frac{1}{4} \cdot 4^{-1/2} (9 \cdot 4^{1/2} + 4^{3/2} + 6 \cdot 4)^{-1} = \frac{1}{400}.$$

因此, $|D_{12}f(9 - 0.02\theta, 4 + 0.01\theta)| < \frac{1}{400}$.

(iii) 因

$$D_{22}f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + x^{1/2}}{(3 + y^{1/2})^3 \cdot y} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 + x^{1/2}}{(3 + y^{1/2})^2 \cdot y^{3/2}}.$$

故當 $4 < x < 9$, $4 < y < 9$ 時,

$$|D_{22}f(x, y)| < \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 9^{1/2}}{(3 + 4^{1/2})^3 \cdot 4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 + 9^{1/2}}{(3 + 4^{1/2})^2 \cdot 4^{3/2}} = 0.011.$$

因此, $|D_{22}f(9 - 0.02\theta, 4 + 0.01\theta)| < 0.011$.

因此

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq \frac{1}{2} \cdot (0.02)^2 |D_{11}f(\mathbf{p} + \theta\mathbf{h})| + (0.01)(0.02) |D_{12}f(\mathbf{p} + \theta\mathbf{h})| \\ &\quad + \frac{1}{2} (0.01)^2 |D_{22}f(\mathbf{p} + \theta\mathbf{h})| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot 0.0004 \cdot \frac{1}{160} + 0.0002 \cdot \frac{1}{400} + \frac{1}{2} \cdot 0.0001 \cdot 0.011 = 2.3 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

此值顯然小於 10^{-4} .

♠ (28-3) 量取平面三角形之二邊長分別為 63 公尺與 78 公尺, 其夾角為 60° , 若測量長度之最大絕對誤差為 0.1 公尺, 測量角度之最大絕對誤差為 0.1° , 試利用全微分方法以求第三邊之最大絕對誤差及百分誤差.

分析 當 $|\mathbf{h}|$ 很小時, $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ 與 $df(\mathbf{p}, \mathbf{h})$ 之差異較 $|\mathbf{h}|$ 更微不足道, 我們以 $df(\mathbf{p}, \mathbf{h})$ 做為 $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ 之近似值. 本題中可令

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (a, b, \theta), \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3), \quad \text{其中} \\ |h_1| &= 0.1, |h_2| = 0.1, |h_3| = 0.1 \cdot \pi/180. \end{aligned}$$

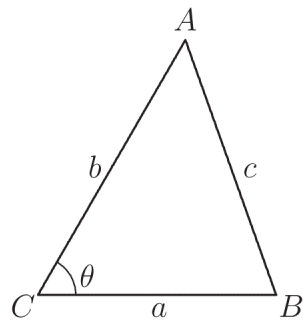


圖 28-1

【解】設三邊長分別為 a, b, c , 其中 $a = 63, b = 78$. 由餘弦定理知

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta},$$

令

$$f(a, b, \theta) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta},$$

則

$$D_1 f(a, b, \theta) = \frac{2a - 2b \cos \theta}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}}, \quad D_1 f\left(63, 78, \frac{\pi}{3}\right) = 0.3348,$$

$$D_2 f(a, b, \theta) = \frac{2b - 2a \cos \theta}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}}, \quad D_2 f\left(63, 78, \frac{\pi}{3}\right) = 0.6487,$$

$$D_3 f(a, b, \theta) = \frac{2ab \sin \theta}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}}, \quad D_3 f\left(63, 78, \frac{\pi}{3}\right) = 59.3645.$$

令 a, b, θ 之增量分別為 $h_1 = \pm 0.1, h_2 = \pm 0.1, h_3 = \pm 0.1 \times \frac{\pi}{180}$, 我們將以 f 之全微分

$$df(\mathbf{p}, \mathbf{h}) = D_1 f(a, b, \theta)h_1 + D_2 f(a, b, \theta)h_2 + D_3 f(a, b, \theta)h_3$$

做為第三邊 c 之最大誤差之近似值, 其絕對值為

$$\begin{aligned} |df(\mathbf{p}, \mathbf{h})| &= \left| D_1 f(a, b, \theta)h_1 + D_2 f(a, b, \theta)h_2 + D_3 f(a, b, \theta)h_3 \right| \\ &\leq \left| D_1 f(a, b, \theta)h_1 \right| + \left| D_2 f(a, b, \theta)h_2 \right| + \left| D_3 f(a, b, \theta)h_3 \right| \\ &= 0.3348 \times 0.1 + 0.6487 \times 0.1 + 59.3645 \times \frac{\pi}{180} \times 0.1 \\ &= 0.20195 \text{ (公尺)}. \end{aligned}$$

而第三邊之邊長為

$$c = \sqrt{63^2 + 78^2 - 2 \cdot 63 \cdot 78 \cdot \frac{1}{2}} = 71.69 \text{ (公尺)}.$$

是以此百分誤差為

$$\frac{|df(\mathbf{p}, \mathbf{h})|}{c} \leq \frac{0.20195}{71.69} = 0.28\%.$$

$$\begin{aligned}
 \iint_T xy \, dx \, dy &= \int_{-2}^1 \int_{x^2}^{-x+2} xy \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=-x+2} dx \\
 &= \int_{-2}^1 \frac{x}{2} ((2-x)^2 - x^4) dx = -5\frac{5}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_A xy \, dx \, dy &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{x^2}^1 xy \, dy \, dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\
 &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{12}x^6 \Big|_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = 0.
 \end{aligned}$$

是以 $\iint_S xy \, dx \, dy = -5\frac{5}{8}$.

♠ (29-2) 試求 $\int_0^1 \int_{5y}^5 e^{x^2} dx \, dy = ?$

分析 不定積分 $\int e^{x^2} dx$ 難以解出，因此必須考慮變換積分次序，這類題目最好能繪出積分之區域。

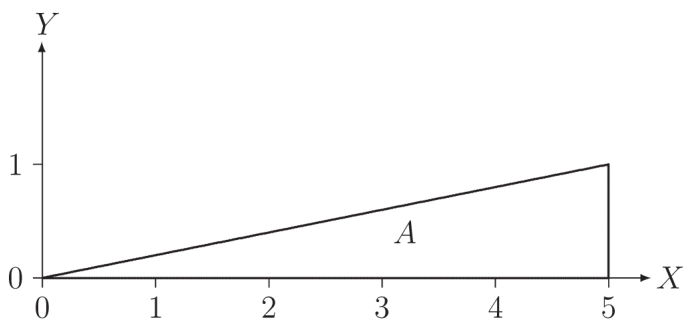


圖 29-2

【解】 本題須變換積分次序，由於積分區域

$$\begin{aligned}
 A &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \quad 5y \leq x \leq 5\} \\
 &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq x/5\}.
 \end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned}
 \text{原題} &= \iint_A e^{x^2} dx \, dy = \int_0^5 \int_0^{x/5} e^{x^2} dy \, dx \\
 &= \int_0^5 \left[ye^{x^2} \right]_{y=0}^{y=x/5} dx = \frac{1}{5} \int_0^5 xe^{x^2} dx = \frac{1}{10}(e^{25} - 1).
 \end{aligned}$$

♠ (29-3) 試求 $\int_0^{+\infty} \int_a^b e^{-xy} dy dx$, (內 $a > 0, b > 0$).

分析 本題解內層時並無困難，但解外層時，不定積分 $\int \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ 解不出來，只好利用重積分改變積分次序之方法。

【解】 積分區域為 $A = [0, +\infty) \times [a, b]$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_a^b e^{-xy} dy dx &= \iint_A e^{-xy} dy dx, \\ &\quad (\text{被積函數為連續, 累次積分等於二重積分}) \\ &= \int_a^b \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-xy} dx \right) dy, \quad (\text{對調積分次序}) \\ &= \int_a^b \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} (1 - e^{-ty}) \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{dy}{y}, \quad (a, b \text{ 均為正, 故 } y > 0) \\ &= \ln |y| \Big|_a^b = \ln b - \ln a. \end{aligned}$$

♠ (29-4) 試求 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sin(ax+by) dx dy$, $a, b \in \mathbb{R}$.

分析 本題看似麻煩，其實它只有測試讀者是否了解「奇函數」在對稱區間之積分為 0。

【解】 由於 $\sin(ax+by) = \sin(ax)\cos(by) + \cos(ax)\sin(by)$ ，是以原題可分為以下兩個二重積分分別計算：

1° 令 $f(x, y) = \sin(ax)\cos(by)$ ，因 $f(-x, y) = -f(x, y)$ ，(對於固定的 y ， $f(x, y)$ 為一奇函數.)，故

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(ax)\cos(by) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 0 dy = 0. \end{aligned}$$

2° 同理，令 $g(x, y) = \cos(ax)\sin(by)$ ，因 $g(x, -y) = -g(x, y)$ ，故

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} g(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(ax)\sin(by) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 0 dx = 0. \end{aligned}$$

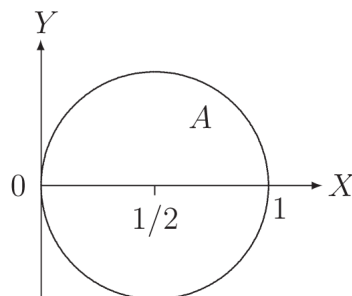
3° 由 1° 及 2° 知原題 = 0.

♠ (29-5) 若 $f(x, y) = \sqrt{x - x^2}$, $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$, 試求 $\iint_A f(x, y) dy dx$.

分析 將集合 A 予以簡化, 繪出圖形.

【解】 由於

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq x &\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ &= \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$



知 A 為圓心在點 $(0, 1/2)$ 半徑為 $1/2$ 之圓, (如圖).

圖 29-3

故

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dy dx &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x-x^2} dy dx \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{x-x^2} \sqrt{x-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^1 (x-x^2) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

♠ (29-6) 試求 $\int_0^1 \int_{y^{1/3}}^1 \frac{\sin \pi x^2}{x^2} dx dy$.

分析 本題直接做有困難, 因為不定積分 $\int \frac{\sin \pi x^2}{x^2} dx$ 解不出來, 因此嘗試對調積分次序.

【解】 令 $f: A \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x^2}{x^2}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 1, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$

其中

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^{1/3} \leq x \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}. \end{aligned}$$

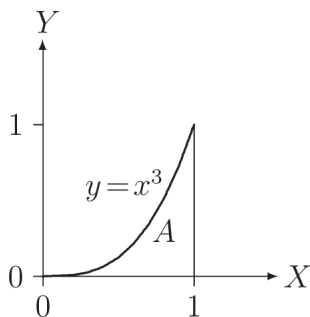


圖 29-4

$$\begin{aligned}
\text{原題} &= \iint_A f(x, y) dA, \quad (\text{因 } f \text{ 在 } A \text{ 上為連續}) \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^3} \frac{\sin \pi x^2}{x^2} dy dx, \quad (\text{因 } f \text{ 在 } A \text{ 上為連續}) \\
&= \int_0^1 \frac{\sin \pi x^2}{x^2} \Big|_{y=0}^{y=x^3} dx \\
&= \int_0^1 x \sin \pi x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi u du, \quad (\text{令 } u = x^2) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \cos \pi u \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

♠ (29-7) 設半徑為 10 之一球體，挖去半徑為 2 的圓孔，而圓孔之中心軸與球心之距離為 3。試求其餘部分之體積。（僅須表為累次積分，不必計算其值）。

分析 球穿孔問題在《微積分》十分常見，通常孔心穿過球中心軸，不論孔半徑若干，皆不難求出。本題刻意鑽歪，計算當然不易，有了數學軟體的協助，可以求出相當精確的數值。

【解】 1° 球之體積為 $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3$ 。

2° 挖去之部分之體積為函數

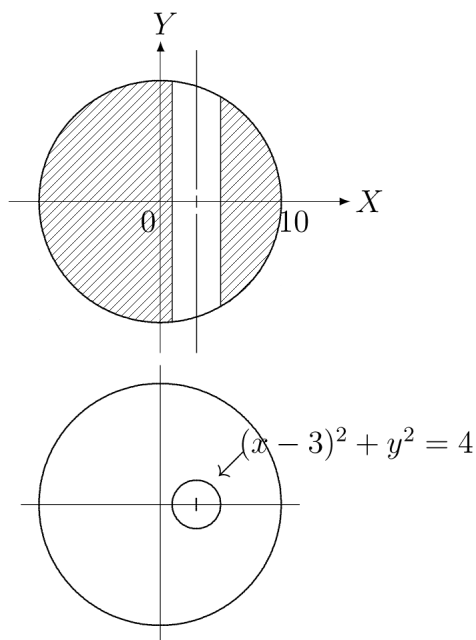
$$f(x, y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$$

在圓區域 $(x-3)^2 + y^2 \leq 4$ 上之體積的二倍，是以此部分之積為

$$W = 2 \int_1^5 \int_{-\sqrt{4-(x-3)^2}}^{\sqrt{4-(x-3)^2}} \sqrt{100 - x^2 - y^2} dy dx$$

3° $V - W$ 即為所欲求。

註：利用電腦之套裝數學軟體，可求出上述 $V - W$ 之近似值為 3951.83。儘管學習《微積分》之主要目的為「邏輯演繹」，實務上，借助數學套裝軟體，它也可解決許多問題。



頂視圖

圖 29-5

♠ (29-8) 試求 $\int_0^2 \int_0^1 \sqrt{|y-x^2|} dx dy$.

分析 欲去除絕對值符號的方法是：將積分範圍繪出，再以 $y = x^2$ 將其分割為二部分。

【解】 先將閉矩形 $R = [0, 1] \times [0, 2]$ 分為二部分，

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y - x^2 \geq 0\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y - x^2 < 0\}.$$

則

$$\text{原題} = \iint_A \sqrt{y-x^2} dx dy + \iint_B \sqrt{x^2-y} dx dy.$$

其中

$$\begin{aligned} \iint_A \sqrt{y-x^2} dx dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} (y-x^2)^{3/2} \right]_{y=x^2}^{y=2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (2-x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} (2 \cos^2 t)^{3/2} \sqrt{2} \cos t dt, \quad (\text{令 } x = \sqrt{2} \sin t) \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^4 t dt \\ &= \frac{8}{3} \left[\frac{3t}{8} + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 4t \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt{x^2-y} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y} dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} (x^2-y)^{3/2} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{是以原題} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{6}.$$

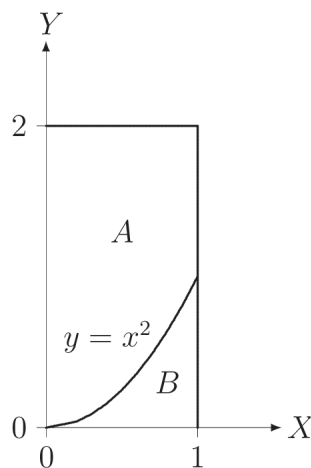


圖 29-6

♠ (29-9) 求積分 $\iint_S (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$, 內 S 為由曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 與坐標軸所圍區域.

分析 函數 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 並不常見, 選幾個點去描繪即可.

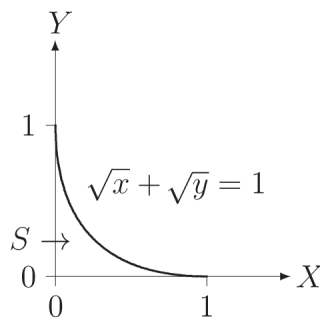


圖 29-7

【解】 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 可化為 $y = (1 - \sqrt{x})^2$, 是以

$$\begin{aligned}
 \text{原題} &= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[\sqrt{x} y + \frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^{y=(1-\sqrt{x})^2} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2 + \frac{2}{3}(1-\sqrt{x})^3 \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - 2x + x^{3/2} + \frac{2}{3}(1 - 3\sqrt{x} + 3x - x^{3/2}) \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 (2 - 3\sqrt{x} + x^{3/2}) dx = \frac{2}{15}.
 \end{aligned}$$

♠ (29-10) 試求 $\iiint_S (1 + x + y + z) dx dy dz$, 其中 S 為三座標軸與 $x + y + z = 1$ 所圍成之區域.

分析 本題主要困難在於如何將集合 S 化為積分範圍, 先令 z 固定, 此時 S 之截面為一三角形, 處理起來較為容易.

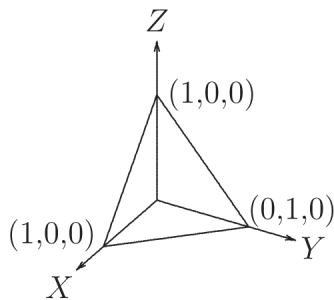
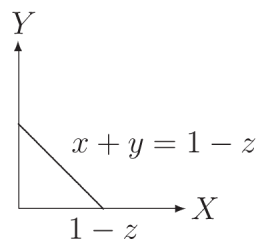


圖 29-8

【解】 1° 首先解析集合 S , 先令 z 固定 $\in (0, 1)$, 則得平行 XY 平面之三角形範圍

$$\begin{aligned}
 &\{(x, y) | x > 0, y > 0, x + y + z < 1\} \\
 &= \{(x, y) | x > 0, y > 0, x + y < 1 - z\} \\
 &= \{(x, y) | 0 < y < 1 - z, 0 < x < 1 - z - y\}.
 \end{aligned}$$

故得



$$S = \{(x, y, z) \mid 0 < x < 1 - z - y, \quad 0 < y < 1 - z, \quad 0 < z < 1\}.$$

2° 是以

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} (1+x+y+z) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left[x + \frac{x^2}{2} + xy + xz \right]_{x=0}^{x=1-y-z} dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left(1-y-z + \frac{(1-y-z)^2}{2} + (1-y-z)y \right. \\ &\quad \left. + (1-y-z)z \right) dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left(\frac{3}{2} - y - z - \frac{y^2}{2} - yz - \frac{z^2}{2} \right) dy dz \\ &= \int_0^1 \left[\frac{3y}{2} - \frac{y^2}{2} - yz - \frac{y^3}{6} - \frac{y^2z}{2} - \frac{z^2y}{2} \right]_{y=0}^{y=1-z} dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} - \frac{3z}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \right) dz \\ &= \left[\frac{5z}{6} - \frac{3z^2}{4} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \right]_0^1 = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

♠ (29-11) 設 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0, & \text{否則,} \end{cases}$

試求 $g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+y, y) dy$.

分析 這是二變數函數的單重積分，但它應用了二重積分對於積分區域的觀念.

【解】 由於

$$\begin{aligned} B &= \{(u, y) \mid f(u+y, y) > 0\} \\ &= \{(u, y) \mid 0 < u+y < 1, \quad 0 < y < 1\} \\ &= \{(u, y) \mid -y < u < 1-y, \quad 0 < y < 1\}. \end{aligned}$$

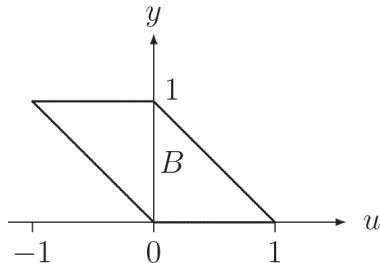


圖 29-9

- 當 $u \leq -1$ 或 $u \geq 1$ 時， $g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$.
- 當 $-1 \leq u \leq 0$ 時， $g(u) = \int_{-u}^1 1 dy = 1 + u$.
- 當 $0 < u \leq 1$ 時， $g(u) = \int_0^{1-u} 1 dy = 1 - u$.

$$\text{結論： } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : g(u) = \begin{cases} 1+u, & \text{若 } -1 \leq u \leq 0, \\ 1-u, & \text{若 } 0 \leq u \leq 1, \\ 0, & \text{否則.} \end{cases}$$

♠ (29-12) 試求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

分析 本題雖為單重積分問題，但必須利用二重積分方能解決，方法奇特，除非見過解法，否則很難解出。此外，嚴格的說本題瑕積分應寫為 $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ，在收斂的情形下， 0^+ 常被省略為 0。

【解】 因為 $\forall x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dy = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{-x} e^{-xy} \Big|_{y=0}^{y=t} = \frac{\sin x}{x}.$$

是以

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dy dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx dy, \quad (\text{對調積分次序}) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}, \quad (\text{見下} [*]) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dy}{1+y^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tan^{-1} t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

[*] 利用二次分部積分法，

$$\int e^{-xy} \sin x dx = \frac{e^{-xy}}{1+y^2} (-y \sin x - \cos x) + C.$$

是以 $\forall y > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^s e^{-xy} \sin x dx \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{e^{-xy}}{1+y^2} (-y \sin x - \cos x) \Big|_{x=0}^{x=s} \\ &= \frac{1}{1+y^2} \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{-y \sin s - \cos s}{e^{sy}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{1+y^2}. \end{aligned}$$

♠ (29-13) 試求 $\int_1^2 \left[\int_y^{y^3} e^x \sqrt{\frac{y}{x}} dx \right] dy + \int_2^8 \left[\int_y^8 e^x \sqrt{\frac{y}{x}} dx \right] dy$.

分析 本題二積分若單獨處理皆不容易，不妨將其積分區域予以聯集，再以對調積分次序解之。

【解】二積分之區域分別為

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2, \ y \leq x \leq y^3\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 8, \ y \leq x \leq 8\},$$

則其聯集為

$$A = A_1 \cup A_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 8, \ x^{1/3} \leq y \leq x\}.$$

如右圖所示；則因被積函數為連續，故積分可以對調其次序，

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \iint_A e^x \sqrt{\frac{y}{x}} dA \\ &= \int_1^8 \int_{x^{1/3}}^x e^x \sqrt{\frac{y}{x}} dy dx \\ &= \int_1^8 \left[\frac{e^x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_{y=x^{1/3}}^{y=x} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_1^8 e^x (x-1) dx \\ &= \frac{2}{3} (x-2)e^x \Big|_1^8 \\ &= \frac{2}{3} (6e^8 + e) = 4e^8 + \frac{2}{3}e. \end{aligned}$$

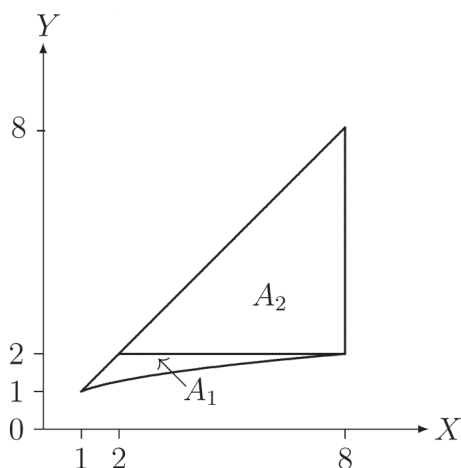


圖 29-10

♠ (29-14) 設 $f(x, y) = \frac{1}{x}$, $S = \{(x, y) \mid x > 0, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- (a) 試繪出 S 之圖形；
 (b) 試求 f 在集合 S 上之二重積分。

【分析】 積分時以極坐標法較為簡單。

【解】(a) S 之圖形：

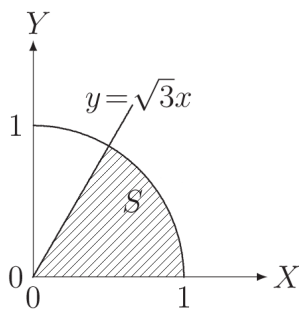


圖 29-11

(b) 法一：利用極坐標法， f 在集合 S 上之二重積分為

$$\begin{aligned}
 \iint_S f(x, y) dA &= \int_0^{\pi/3} \int_{0+}^1 \frac{1}{r \cos \theta} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \sec \theta dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/3} \sec \theta d\theta \\
 &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| \Big|_0^{\pi/3} \\
 &= \ln |2 + \sqrt{3}| - \ln |1 + 0| = \ln (2 + \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

法二：利用二重積分法， f 在集合 S 上之二重積分為 $I_1 + I_2$ ，分別在直線 $x = 1/2$ 之左右：

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{0+}^{1/2} \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{1}{x} dy dx = \int_{0+}^{1/2} \frac{\sqrt{3}x}{x} dx = \int_{0+}^{1/2} \sqrt{3} dx = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\
 I_2 &= \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{x} dy dx = \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx \\
 &= \left[\sqrt{1-x^2} - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right| \right]_{1/2}^1, \quad (\text{見下 } [*]) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \left| 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln (2 + \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

故 $I_1 + I_2 = \ln (2 + \sqrt{3})$.

[*] 先令 $x = \sin \theta$ ，則 $dx = \cos \theta d\theta$ ，

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx &= \int \cot \theta \cos \theta d\theta \\
 &= \cos \theta + \int \csc \theta d\theta, \quad (u = \cot \theta, \quad dv = \cos \theta d\theta) \\
 &= \cos \theta - \ln |\csc \theta + \cot \theta| + C \\
 &= \sqrt{1-x^2} - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

註：另一方法是對調積分次序，讀者不妨自行試之。

令 $E = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta \right\}$, (即交集之第一象限部分), 則

$A \cap B$ 之面積 $= 4 A(E)$, (註: $A(E) = \text{area of } E$)

$$\begin{aligned}
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\cos \theta} r \, dr \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=1+\cos \theta} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= 2 \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{3}{2} \pi + 4.
 \end{aligned}$$

♠ (30-2) 設集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, 試

以極坐標法求 $\iint_A x^2 y \, dx \, dy = ?$

分析 A 為圓心在點 $(1, 1)$, 半徑為 1 之圓片, 若以極坐標函數表示則為 $0 \leq r \leq 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. 我們可以在此範圍內積分. 另一種方法是將整個物體予以位移, 以使圓片之中心為原點.

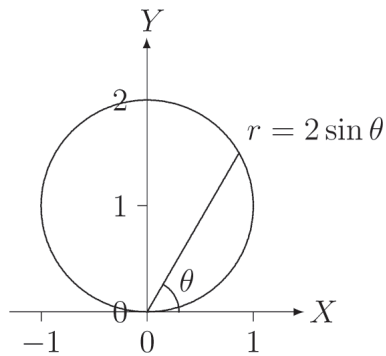


圖 30-2

【解】法一：由於集合 A 為圓心在點 $(1, 1)$, 半徑為 1 之圓片, 以極坐標函數表示則為 $0 \leq r \leq 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 則

$$\begin{aligned}
 \iint_A x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} r^2 \cos^2 \theta \cdot r \sin \theta \cdot r \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^\pi \left[r^5 \cos^2 \theta \sin \theta \right]_{r=0}^{r=2 \sin \theta} d\theta \\
 &= \frac{32}{5} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^6 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{32}{5} \left[\frac{-1}{8} \sin^5 \theta \cos^3 \theta - \frac{5}{48} \sin^3 \theta \cos^3 \theta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5}{64} \sin \theta \cos^3 \theta + \frac{5}{128} \cos \theta \sin \theta + \frac{5}{128} \theta \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

法二：先平移之, 即令 $v = y - 1$, 則

$$\iint_A x^2 y \, dx \, dy = \iint_B x^2 (v+1) \, dx \, dv = *$$

其中 $B = \{(x, v) \mid x^2 + v^2 \leq 1\}$, 爲一單位圓片, 其次, 以極坐標變換之, 令 $x = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$, 則

$$\begin{aligned}
 * &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta)(r \sin \theta + 1) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^4 \cos^2 \theta \sin \theta + r^3 \cos^2 \theta) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{r^4}{4} \cos^2 \theta \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{1}{8} (1 + \cos 2\theta) \right) d\theta \\
 &= \left[\frac{-1}{15} \cos^3 \theta + \frac{1}{8} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

♠ (30-3) 設集合 S 爲拋物線 $r(1 + \cos \theta) = 1$ 之右側 (即不含原點之部分), 集合 T 爲單位圓 $r = 1$ 之內側. 試利用二重積分方法求 $S \cap T$ 之面積.

分析 先將拋物線 $r(1 + \cos \theta) = 1$ 化爲直角坐標型式, 以方便繪圖, 其次求出二曲線之交點, 關於以二重積分求某區域之面積, 可參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十一章 §11.5.

【解】 1° 將 $r(1 + \cos \theta) = 1$ 化爲直角坐標型式, 由於

$$x = r \cos \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

$$\begin{aligned}
 r(1 + \cos \theta) = 1 &\Rightarrow r + r \cos \theta = 1 \\
 &\Rightarrow (x^2 + y^2)^{1/2} + x = 1 \\
 &\Rightarrow x^2 + y^2 = (1 - x)^2 \\
 &\Rightarrow x = -\frac{1}{2}(y^2 - 1). \\
 &\quad (\text{此爲一拋物線})
 \end{aligned}$$

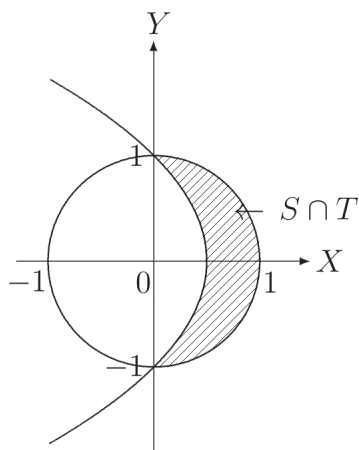


圖 30-3

2° 次求交點, 由題意二曲線相交應有

$$\frac{1}{1 + \cos \theta} = 1 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}.$$

3° 極坐標法： $S \cap T$ 之面積為

$$\begin{aligned}
 A(S \cap T) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1/(1+\cos \theta)}^1 r \, dr d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=1/(1+\cos \theta)}^{r=1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{(1+\cos \theta)^2} \right) d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}, \quad (\text{利用半角代換法}) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

4° 直角坐標法：以右半圓面積減去 Y 軸以右之拋物線面積即可。由於 Y 軸與拋物線所圍區域之面積為

$$\begin{aligned}
 A_2 &= 2 \int_0^1 \int_0^{-(y^2-1)/2} dx \, dy \\
 &= -2 \int_0^1 \frac{y^2-1}{2} dy = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

故所求之面積為 $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

♠ (30-4) 設橢圓體 $E = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$, 內 $a, b, c > 0$.

(a) 試利用切片法以求 E 之體積；

(b) 設已知半徑為 r 之球體體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$, 試利用積分變換公式, 求 E 之體積.

分析 橢球 E 與平面 $x = x_0$, 其中 $-a < x_0 < a$, 相截乃為一橢圓片, 已知橢圓面積為 $(\pi \cdot \text{半長軸} \cdot \text{半短軸})$, 再切片法解之.

【解】(a) 若視 $x_0 (\in (-a, a))$ 為一常數, 則平面 $x = x_0$ 與橢球之交集乃為橢圓

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2},$$

可化為

$$\frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

內 $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$, 是以此橢圓內部之面積為

$$\pi b_1 c_1 = \pi bc \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right).$$

若令函數

$$\begin{aligned} A: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R} : A(x) &= \text{“垂直於 } X \text{ 軸在點 } x \text{ 與橢球之截面積”} \\ &= \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

則橢球之(切片法)體積為

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_{-a}^a A(x) dx = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= \pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

(b) 橢圓體之體積為 $V = \iiint_E dx dy dz$, 我們將利用積分變換解之. 令

$$\mathbf{g}^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{g}^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right),$$

則

$$1^\circ \quad \mathbf{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{g}(u, v, w) = (au, bv, cw);$$

2°

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{g}}(u, v, w) &= \begin{vmatrix} D_1 g_1(u, v, w) & D_2 g_1(u, v, w) & D_3 g_1(u, v, w) \\ D_1 g_2(u, v, w) & D_2 g_2(u, v, w) & D_3 g_2(u, v, w) \\ D_1 g_3(u, v, w) & D_2 g_3(u, v, w) & D_3 g_3(u, v, w) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc; \end{aligned}$$

3° $\mathbf{g}^{-1}(E) = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$, 此乃半徑為 1 之球體. 是以

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_{\mathbf{g}^{-1}(E)} |J_{\mathbf{g}}(u, v, w)| du dv dw \\ &= abc \cdot V_1, \quad (V_1 \text{ 為半徑為 } 1 \text{ 之球之體積}) \\ &= abc \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} abc. \end{aligned}$$

♠ (30-5) 設 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = e^{x+y}$, 集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

(a) 試繪出集合 A ;

(b) 試直接以二重積分求 $\iint_A e^{x+y} dx dy$;

(c) 試利用積分變換以求上述積分.

分析 了解集合 A 之方法之一是考慮以下四種情況:

① $x \geq 0, y \geq 0$, ② $x \geq 0, y \leq 0$, ③ $x \leq 0, y \geq 0$, ④ $x \leq 0, y \leq 0$.

- 【解】(a) 當 $x \geq 0, y \geq 0$ 時, $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow x + y \leq 1$;
 當 $x \geq 0, y \leq 0$ 時, $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow x - y \leq 1$;
 當 $x \leq 0, y \geq 0$ 時, $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow -x + y \leq 1$;
 當 $x \leq 0, y \leq 0$ 時, $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow -x - y \leq 1$;
 所以 A 之圖形如下 :

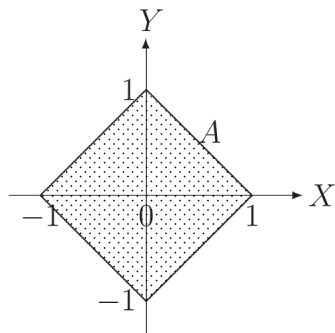


圖 30-4

- (b) 我們以 Y 軸之左右討論此積分值 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} e^{x+y} dy dx = \int_0^1 [e^x e^y]_{y=x-1}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 e - e^{2x-1} dx = \frac{1}{2}(e + e^{-1}) ; \\ I_2 &= \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{1+x} e^{x+y} dy dx = \int_{-1}^0 [e^x e^y]_{y=-x-1}^{y=1+x} dx \\ &= \int_{-1}^0 e^{2x+1} - e^{-1} dx = \frac{1}{2}(e - 3e^{-1}) . \end{aligned}$$

所以 $\iint_A e^{x+y} dx dy = I_1 + I_2 = e - e^{-1}$.

- (c) 令 $\mathbf{g}^{-1}(x, y) = (x + y, x - y)$, 則由

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) , \\ y = \frac{1}{2}(u - v) , \end{cases}$$

知

$$1^\circ \quad \mathbf{g}(u, v) = \left(\frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2}(u - v) \right) ,$$

$$2^\circ \quad \mathbf{g}^{-1}(A) = [-1, 1] \times [-1, 1] ,$$

$$3^\circ \quad J_{\mathbf{g}}(u, v) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} .$$

所以

$$\begin{aligned} \int_A f &= \iint_{\mathbf{g}^{-1}(A)} f(\mathbf{g}(u, v)) |J_{\mathbf{g}}(u, v)| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^u du dv = e - e^{-1} . \end{aligned}$$

♠ (30-6) 試求雙紐線 (lemniscate)

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, \quad (a > 0)$$

所圍區域之面積。

分析 繪圖和解題息息相關，可先求 $\theta = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \dots$ 時相對 r 之值， r 有正負，其圖形既對稱於 X 軸又對稱於 Y 軸。

【解】 雙紐線在第一象限之範圍若以極坐標來描述，則為

$$0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4.$$

是以雙紐線所圍區域的面積為

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r \, dr \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta = a^2. \end{aligned}$$

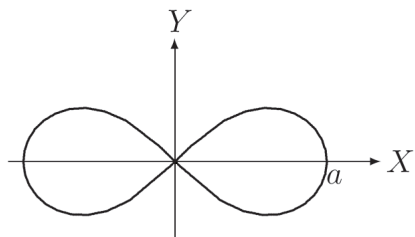


圖 30-5

♠ (30-7) 試求重積分 $\iint_A \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy$ ，內 A 為

環形區域 $\{(x, y) \mid \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ 。

分析 如果不利用極坐標變換，本題將難以解出。

【解】 利用極坐標變換，令 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ ，則 Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

故

$$\begin{aligned} \iint_A \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (\sin r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\cos r^2 \right]_{r=\pi}^{r=2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos \pi^2 - \cos 4\pi^2) d\theta \\ &= \pi(\cos \pi^2 - \cos 4\pi^2). \end{aligned}$$

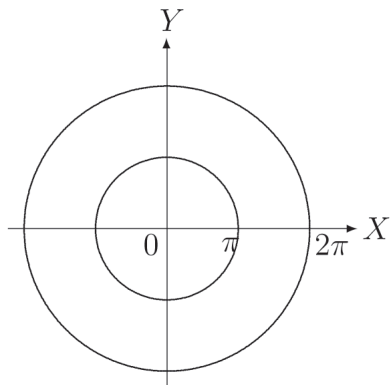


圖 30-6

♠ (30-8) 試求 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$.

分析 本題須先解出 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, 再利用分部積分法.

【解】 1° 先證 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 參見拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十一章 §11.3.

例 2. (解題過程須利用二重積分之極坐標變換.)

2° 利用分部積分法, 令 $u = x$, $dv = x e^{-x^2} dx$, 則 $du = dx$, $v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$,

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x^2 e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x}{2} e^{-x^2} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-x^2} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

♠ (30-9) 試求 $\iint_E e^{(y-x)/(y+x)} dx dy$, 其中 E 為 $x-y$ 平面上且由 $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(1, 0)$ 四個頂點所圍成之梯形區域.

分析 本題若不使用積分變換, 則在求不定積分 $\int e^{(y-x)/(y+x)} dx$ 時即遭遇困難.

【解】 做變換, 令 $\mathbf{g}^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{g}^{-1}(x, y) = (u, v)$, 其中 $\begin{cases} u = y - x, \\ v = y + x. \end{cases}$ 則由

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(v - u), \\ y = \frac{1}{2}(u + v), \end{cases}$$

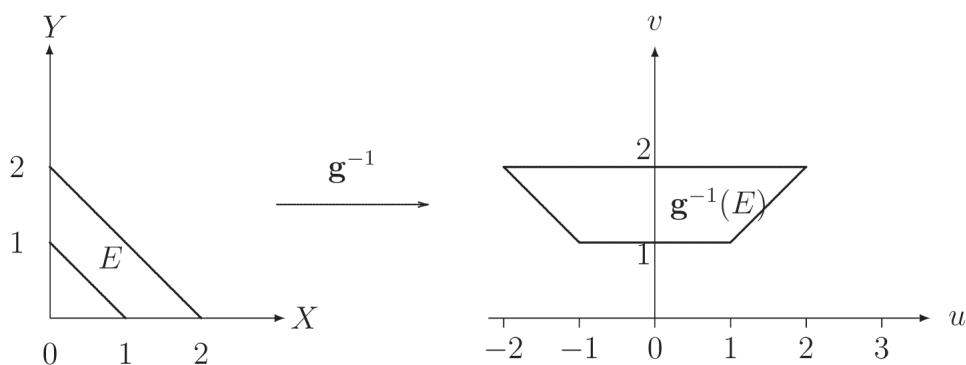


圖 30-7

知

$$1^\circ \quad \mathbf{g}(u, v) = \left(\frac{1}{2}(v - u), \frac{1}{2}(u + v) \right),$$

2° 先求 E 四頂點之像,

$$\mathbf{g}^{-1}(0, 1) = (1, 1), \quad \mathbf{g}^{-1}(0, 2) = (2, 2), \quad \mathbf{g}^{-1}(2, 0) = (-2, 2), \quad \mathbf{g}^{-1}(1, 0) = (-1, 1)$$

此四點所圍之梯形即為

$$\mathbf{g}^{-1}(E) = \{(u, v) \mid 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}.$$

$$3^\circ \quad \text{變換之 Jacobian 爲 } J_{\mathbf{g}}(u, v) = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_E e^{(y-x)/(y+x)} dx dy &= \iint_{\mathbf{g}^{-1}(E)} e^{u/v} \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^v e^{u/v} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \int_1^2 v dv = \frac{3}{4} (e - e^{-1}). \end{aligned}$$

♠ (30-10) 我的體積是 $\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} (r + r^3) dr d\theta$. 我是什麼?

分析 本題的答案不唯一, 命題者希望得到的答案是, 將極坐標變換之重積分還原為直角坐標之二重積分.

【解】 將極坐標變換之重積分還原為直角坐標, 則

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} (r + r^3) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} (1 + r^2) r dr d\theta \\ &= \iint_D (1 + x^2 + y^2) dA. \end{aligned}$$

其中 D 為由心臟線 $r = 1 + \cos\theta$ 所圍之區域. 是以

$$\text{我} = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}.$$

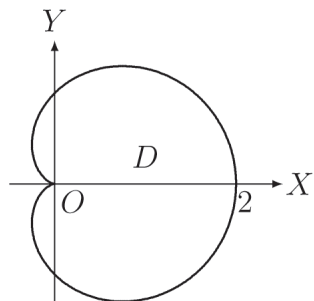


圖 30-8

♠ (30-11) 試求笛卡爾葉線 (Folium of Descartes)

$$r = \frac{3 \sin \theta \cdot \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}, \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

所圍區域之面積.

分析 所圍葉狀區域之 θ 範圍只有 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

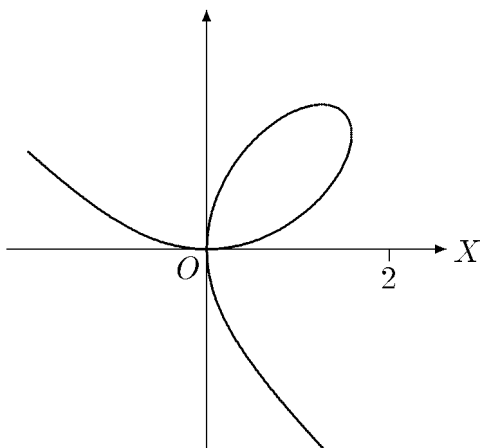


圖 30-9

【解】 爲方便計，先將曲線化爲

$$r = \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

所求之面積爲

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2^-} \int_0^{\frac{3 \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta}} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2^-} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\frac{3 \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta}} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2^-} \frac{\sec^2 \theta \tan^2 \theta}{(1 + \tan^3 \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 \, du}{(1 + u^3)^2}, \quad (\text{令 } u = \tan \theta) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{3}{2(1 + u^3)} \right]_0^t = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

♠ (30-12)

- (a) 試求心臟線 $r(\theta) = 1 + \cos \theta$ 之周長；
 (b) 試求上述心臟線繞 X 軸旋轉所得曲面之面積。

分析 本題原屬第 20 單元「積分之應用」裡之題目，但有關極坐標函數多半在積分變換中討論，因此將題目放置在本單元內。解題之前須先求出「極坐標函數」之弧長及迴轉曲面公式。（心臟線之圖形參閱圖 30-8）。

【解】(a) 首先推導「極坐標函數」之弧長公式，先將極坐標函數化為參數方程式，由

$$\begin{aligned} x &= r(\theta) \cos \theta, \quad y = r(\theta) \sin \theta \\ \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} &= r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta, \\ \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left((r'(\theta))^2 \cos^2 \theta - 2r'(\theta)r(\theta) \sin \theta \cos \theta + r^2(\theta) \sin^2 \theta\right) \\ &\quad + \left((r'(\theta))^2 \sin^2 \theta + 2r'(\theta)r(\theta) \sin \theta \cos \theta + r^2(\theta) \cos^2 \theta\right) \\ &= (r'(\theta))^2 + r^2(\theta). \end{aligned}$$

是以所求之弧長為

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r'(\theta))^2 + r^2(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$

(b) 仿之，「極坐標函數」之迴轉曲面之公式為

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b 2\pi |y(\theta)| \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_a^b 2\pi |r(\theta) \sin \theta| \sqrt{(r'(\theta))^2 + r^2(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

我們利用心臟線之上半， $r(\theta) = 1 + \cos \theta$ ， $0 \leq \theta \leq \pi$ ，繞 X 軸旋轉，則所求表面積為

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \sin \theta \cdot \sqrt{2}(1 + \cos \theta)^{1/2} d\theta \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^{3/2} \sin \theta d\theta \\ &= 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{-2}{5} \left[(1 + \cos \theta)^{5/2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{32\pi}{5}. \end{aligned}$$

分析 由物理學知：地面的正向力大小為 mg ，而推得三維力場為 $\mathbf{F}(t) = (0, 0, mg)$ 。

【解】(a) 作用於此質點之力為 $\mathbf{F}(t) = (0, 0, mg)$ ，其中 g 為重力加速度。

(b) 所作之功為

$$\begin{aligned} W &= \int_1^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_1^3 (0, 0, mg) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_1^3 mg dt = (3-1)mg = 2mg. \end{aligned}$$

(c) 軌跡之長度

$$L = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_1^3 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = 2\sqrt{2}.$$

♠ (31-3) 設 C 為由以下二函數所定之正向簡單閉曲線：

$$y = x^2, y = \sqrt{x}.$$

(a) 試將 C 以參數方程式表之；

(b) 試以線積分定義直接求 $\int_C x^2 y dx + 3xy dy = ?$

(c) 試利用 Green 定理以求 $\int_C x^2 y dx + 3xy dy = ?$

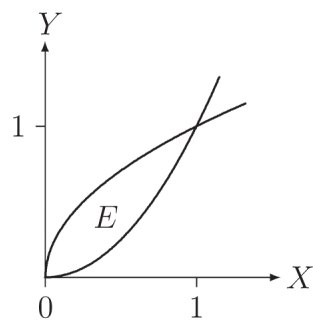


圖 31-1

分析 以參數方程式表示曲線 C 時，應分 $0 \leq t \leq 1$ 及 $1 \leq t \leq 2$ 二段考慮。

【解】(a) 我們可用以下參數方程式表示曲線 C ：

$$\mathbf{r}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (t, t^2), & \text{若 } 0 \leq t \leq 1, \\ (2-t, \sqrt{2-t}), & \text{若 } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

(b) 利用線積分之定義，首先令 $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, 3xy)$ ，則

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt + \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(t, t^2) \cdot (1, 2t) dt + \int_1^2 \mathbf{F}(2-t, \sqrt{2-t}) \cdot (-1, \frac{-1}{2\sqrt{2-t}}) dt \\ &= \int_0^1 (t^4, 3t^3) \cdot (1, 2t) dt + \int_1^2 ((2-t)^{5/2}, 3(2-t)^{3/2}) \cdot (-1, \frac{-1}{2\sqrt{2-t}}) dt \\ &= \int_0^1 7t^4 dt - \int_1^2 \left((2-t)^{5/2} - 3 + \frac{3t}{2} \right) dt \\ &= \frac{7}{5} - \frac{29}{28} = \frac{51}{140}. \end{aligned}$$

(c) 設 E 為由上述二曲線所圍之區域, $P = x^2y$, $Q = 3xy$, 利用 Green 定理,

$$\begin{aligned}
 \text{原題} &= \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (3y - x^2) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{3y^2}{2} - x^2y \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{3}{2}(x - x^4) - (x^{5/2} - x^4) \right] dx \\
 &= \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^{7/2}}{7/2} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{10} - \frac{2}{7} = \frac{51}{140}.
 \end{aligned}$$

♠ (31-4) 設 R 為 $\mathbb{R}^2$ 上一連通之緊緻區域, $\mathbf{r}$ 為其邊界且為一平滑正向曲線. 試證 R 之面積為 $\frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} -y dx + x dy$.

分析 Green 定理可以「用面積觀念」解「線積分」, 本題則反過來以「線積分」解「面積問題」.

【解】 令 $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, 則 $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, 是以 R 之面積為

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \iint_R dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} P dx + Q dy, \quad (\text{利用 Green 定理}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} -y dx + x dy.
 \end{aligned}$$

♠ (31-5) 試求某力場

$$\mathbf{F}(x, y) = (\sin x - y) \mathbf{i} + (\exp y - x^2) \mathbf{j}$$

沿圓 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 以順時針方向運動一週所作之功 (work), 其中長度之單位為公尺, 力之單位為牛頓.

分析 本題應以 Green 定理解之, 若以線積分定義解之則十分困難.

【解】設 $\mathbf{r}$ 為圓 $x^2 + y^2 = a^2$ 之正向邊界（即逆時針方向），

$$\mathbf{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t).$$

次設 $P(x, y) = \sin x - y$, $Q(x, y) = \exp y - x^2$, 則

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x,$$

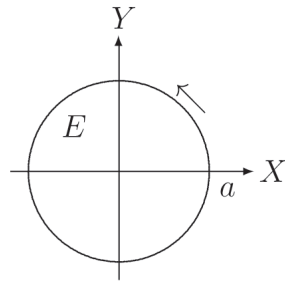


圖 31-2

故所求之功為

$$\begin{aligned} W &= - \oint_{\mathbf{r}} P dx + Q dy, \quad (\text{題目規定之運動方向為順時針}) \\ &= - \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (\text{Green 定理, } E \text{ 為 } \mathbf{r} \text{ 所圍之區域}) \\ &= - \iint_E (1 - 2x) dx dy \\ &= - \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (1 - 2x) dy dx \\ &= -2 \int_{-a}^a (1 - 2x) \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= -2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx + 4 \int_{-a}^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= -2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx + 0, \quad (\text{第二項之被函數為奇函數}) \\ &= -\pi a^2 \text{ (joule)}, \quad (\text{積分等於半圓面積}). \end{aligned}$$

♠ (31-6) 試求線積分 $\oint_{\mathbf{r}} P dx + Q dy$, 其中

$$P(x, y) = xe^{-y^2}, \quad Q(x, y) = -x^2 ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$\mathbf{r}$ 為沿正方形 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq a\}$ 之正向邊界。

【分析】 利用被積函數為「奇函數」，可簡化解題之麻煩。

【解】 由於

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xye^{-y^2} - \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2xye^{-y^2}.$$

利用 Green 定理，

$$\begin{aligned} \oint P dx + Q dy &= \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_E \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= 0, \quad (\text{因內層之被積函數為奇函數}). \end{aligned}$$

♠ (31-7) 設某矩形其四頂點為 $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$ 與 $(0, 2)$, 而 $\mathbf{r}$ 為此矩形的正向邊界.

(a) 設 $\mathbf{r}_1$ 為路徑自 $(0, 0)$ 至 $(3, 0)$, $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ 則依次排列之, 試求:

$$\int_{\mathbf{r}_j} 2y dx - 3x dy = ? \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

(b) 利用 (a) 題求 $\int_{\mathbf{r}} 2y dx - 3x dy = ?$

(c) 利用 Green 定理以求上述線積分.

分析 將曲線 $\mathbf{r}$ 描述出來乃為解題關鍵. $\mathbf{r}$ 的寫法雖不唯一, 但不影響積分之值.

【解】 (a) 四段子路徑分別如下:

$$\mathbf{r}_1: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{r}_1(t) = (t, 0),$$

$$\mathbf{r}_2: [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{r}_2(t) = (3, t-3),$$

$$\mathbf{r}_3: [5, 8] \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{r}_3(t) = (8-t, 2),$$

$$\mathbf{r}_4: [8, 10] \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{r}_4(t) = (0, 10-t).$$

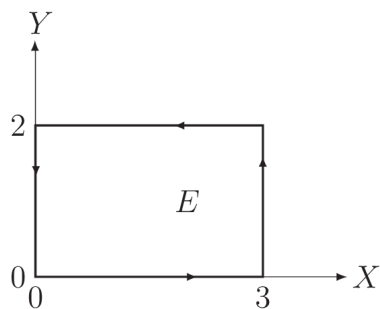


圖 31-3

由題意知 $\mathbf{F}(x, y) = (2y, -3x)$, 故

$$\int_{\mathbf{r}_1} 2y dx - 3x dy = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt = \int_0^3 (0, -3t) \cdot (1, 0) dt = 0,$$

$$\int_{\mathbf{r}_2} 2y dx - 3x dy = \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt = \int_3^5 (2(t-3), -9) \cdot (0, 1) dt = -18,$$

$$\int_{\mathbf{r}_3} 2y dx - 3x dy = \mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t)) \cdot \mathbf{r}'_3(t) dt = \int_5^8 (4, -3(8-t)) \cdot (-1, 0) dt = -12,$$

$$\int_{\mathbf{r}_4} 2y dx - 3x dy = \mathbf{F}(\mathbf{r}_4(t)) \cdot \mathbf{r}'_4(t) dt = \int_8^{10} (2(10-t), 0) \cdot (0, -1) dt = 0.$$

$$(b) \quad \int_{\mathbf{r}} 2y dx - 3x dy = 0 - 18 - 12 + 0 = -30.$$

(c) 令 $P(x, y) = 2y$, $Q(x, y) = -3x$, 利用 Green 定理,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} 2y dx - 3x dy &= \oint_{\mathbf{r}} P dx + Q dy \\ &= \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (E \text{ 爲 } \mathbf{r} \text{ 所圍之區域}) \\ &= \int_0^2 \int_0^3 (-3 - 2) dx dy \\ &= -30. \end{aligned}$$

♠ (31-8) 試求經由下列路徑之線積分： $\int_{C_j} [(x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy]$ 。

(a) C_1 為自 $(0, 1)$ 到 $(1, 2)$ 之直線；

(b) C_2 為自 $(0, 1)$ 到 $(1, 2)$ 之拋物線 $y = x^2 + 1$ 。

分析 必須將二路徑予以參數化。

【解】 (a) 自 $(0, 1)$ 到 $(1, 2)$ 之直線可用以下參數方程式

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t + 1, \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

表之。是以

$$\begin{aligned} \int_{C_1} [(x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy] \\ &= \int_0^1 (t^2 - (t + 1)) dt + \int_0^1 ((t + 1)^2 + t) dt \\ &= \int_0^1 (2t^2 + 2t) dt = \frac{2}{3}t^3 + t^2 \Big|_0^1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

(b) 自 $(0, 1)$ 到 $(1, 2)$ 之拋物線 $y = x^2 + 1$ 可以參數方程式

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 + 1, \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

表之。是以

$$\begin{aligned} \int_{C_2} [(x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy] \\ &= \int_0^1 (t^2 - (t^2 + 1)) dt + \int_0^1 ((t^2 + 1)^2 + t) \cdot 2t dt \\ &= -1 + 2 \int_0^1 (t^5 + 2t^3 + t^2 + t) dt \\ &= -1 + 2 \left[\frac{t^6}{6} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

♠ (31-9) 試求線積分 $\int_{\mathbf{r}} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$ ，其中路徑

$$\mathbf{r}: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbf{r}(t) = (e^t, \sin t).$$

分析 本題若以線積分之定義解之，相當麻煩。在此我們考慮以線積分基本定理來解決。讀者請參閱拙著《微積分學·電子書 2.1 版》第十一章 §11.6。

【解】1° 設 $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2})$, 即

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

由於

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

故知存在 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}).$$

2° 次求 f , 由上式知

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, & (1) \\ D_2 f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} + g(x) \quad (3)$$

$$\Rightarrow D_1 f(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + g'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0, \quad (\text{由 (1)})$$

$$\Rightarrow g(x) = C \quad (4)$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} + C.$$

其中 C 為一固定之任意常數.

3° 利用線積分基本定理,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{r}} \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right] \\ &= \int_0^{\pi/2} \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= f(\mathbf{r}(\pi/2)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(\exp(\pi/2), 1) - f(1, 0) \\ &= \tan^{-1}(e^{-\pi/2}) + C - \tan^{-1} 0 - C = \tan^{-1}(e^{-\pi/2}). \end{aligned}$$

♠ (31-10) 試以曲面積分求半球體 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0$ 之表面積.

分析 以旋轉體表面積方法, 可以很容易解出半球體之表面積, 但題意規定必須使用「曲面積分」, 其公式為

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

其中 D 為所求曲面在 XY 平面之投影.

【解】半球體之表面積有二部分，其一為曲面部分之表面積，其二為底之表面積。

1° 設 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 。曲面則為函數：

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

曲面部分之表面積為

$$\begin{aligned} A_1 &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta, \quad (\text{極坐標變換}) \\ &= a \int_0^{2\pi} -\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_{r=0}^{r=a} d\theta = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

2° 半球體之底為一半徑為 a 之圓區域，故 $A_2 = \pi a^2$ 。

3° 二者之和為 $3\pi a^2$ ，此為半球體之表面積。

♠ (31-11) 設 $f: D \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = x^2 + y^2$ ，其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

試以曲面積分方法求 f 之面積。

分析 D 為四分之一圓片，半徑為 $\sqrt{2}$ 。

【解】曲面之表面積為

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta, \quad (\text{極坐標變換}) \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} d\theta = \frac{13\pi}{12}. \end{aligned}$$